Geometria CR e algebre CR

Costantino Medori

Università di Parma

Varietà reali e varietà complesse:
geometria, topologia e analisi armonica

Pisa, 2 Marzo 2013

Varietà CR

Definizione (Varietà CR di tipo (n, k))

- $M = M^{2n+k}$, *varietà reale,*
- $H = \mathbb{H}^{0,1} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, *sottofibrato complesso (di rango n) tale che*

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{0,1} \cap \overline{\mathbb{H}^{0,1}} = 0, \\ [\Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), \Gamma(\mathbb{H}^{0,1})] \subset \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}). \end{cases}$$

I numeri n, k sono la dimensione CR e la codimensione CR, rispettivamente.

Definizione (Applicazioni e fibrazioni CR)

Un'applicazione CR tra due varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ e $(M', \mathbb{H}^{0,1'})$ è una

$$f : M \to M' \quad \text{tale che} \quad df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) \subset \mathbb{H}^{0,1'}.$$

Un'applicazione CR f è fibrazione CR se f è una summersione e $df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) = \mathbb{H}^{0,1'}$

Varietà CR

Definizione (Varietà CR di tipo (n, k))

- $M = M^{2n+k}$, *varietà reale,*
- $H = \mathbb{H}^{0,1} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, *sottofibrato complesso (di rango n) tale che*

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{0,1} \cap \overline{\mathbb{H}^{0,1}} = 0, \\ [\Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), \Gamma(\mathbb{H}^{0,1})] \subset \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}). \end{cases}$$

I numeri n, k sono la dimensione CR e la codimensione CR, rispettivamente.

Definizione (Applicazioni e fibrazioni CR)

Un'applicazione CR tra due varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ e $(M', \mathbb{H}^{0,1'})$ è una

$$f : M \to M' \quad \text{tale che} \quad df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) \subset \mathbb{H}^{0,1'}.$$

Un'applicazione CR f è fibrazione CR se f è una summersione e $df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) = \mathbb{H}^{0,1'}$

Varietà CR

Definizione (Varietà CR di tipo (n, k))

- $M = M^{2n+k}$, *varietà reale,*
- $H = \mathbb{H}^{0,1} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, *sottofibrato complesso (di rango n) tale che*

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{0,1} \cap \overline{\mathbb{H}^{0,1}} = 0, \\ [\Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), \Gamma(\mathbb{H}^{0,1})] \subset \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}). \end{cases}$$

I numeri n, k sono la dimensione CR e la codimensione CR, rispettivamente.

Definizione (Applicazioni e fibrazioni CR)

Un'applicazione CR tra due varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ e $(M', \mathbb{H}^{0,1'})$ è una

$$f : M \to M' \quad \text{tale che} \quad df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) \subset \mathbb{H}^{0,1'}.$$

Un'applicazione CR f è fibrazione CR se f è una summersione e $df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) = \mathbb{H}^{0,1'}$

Varietà CR

Definizione (Varietà CR di tipo (n, k))

- $M = M^{2n+k}$, *varietà reale,*
- $H = \mathbb{H}^{0,1} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, *sottofibrato complesso (di rango n) tale che*

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{0,1} \cap \overline{\mathbb{H}^{0,1}} = 0, \\ [\Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), \Gamma(\mathbb{H}^{0,1})] \subset \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}). \end{cases}$$

I numeri n, k sono la dimensione CR e la codimensione CR, rispettivamente.

Definizione (Applicazioni e fibrazioni CR)

Un'applicazione CR tra due varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ e $(M', \mathbb{H}^{0,1'})$ è una

$$f : M \to M' \quad \text{tale che} \quad df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) \subset \mathbb{H}^{0,1'}.$$

Un'applicazione CR f è fibrazione CR se f è una summersione e $df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) = \mathbb{H}^{0,1'}$

Varietà CR

Definizione (Varietà CR di tipo (n, k))

- $M = M^{2n+k}$, *varietà reale,*
- $H = \mathbb{H}^{0,1} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, *sottofibrato complesso (di rango n) tale che*

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{0,1} \cap \overline{\mathbb{H}^{0,1}} = 0, \\ [\Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), \Gamma(\mathbb{H}^{0,1})] \subset \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}). \end{cases}$$

I numeri n, k sono la dimensione CR e la codimensione CR, rispettivamente.

Definizione (Applicazioni e fibrazioni CR)

Un'applicazione CR tra due varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ e $(M', \mathbb{H}^{0,1'})$ è una

$$f : M \to M' \quad \text{tale che} \quad df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) \subset \mathbb{H}^{0,1'}.$$

Un'applicazione CR f è fibrazione CR se f è una summersione e $df^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^{0,1}) = \mathbb{H}^{0,1'}$

Remark

- *Le ipersuperficî di* $\mathbb{C}^n$ *sono varietà CR:* $\mathbb{H}^{0,1} = T^{0,1}\mathbb{C}^n \cap T^{\mathbb{C}}M$.
- *Dato un gruppo G di biolomorfismi di una varietà complessa X, ogni G-orbita M è una varietà CR:* $\mathbb{H}^{0,1} = T^{1,0}X \cap T^{\mathbb{C}}M$.

Remark

- *Le ipersuperficî di* $\mathbb{C}^n$ *sono varietà CR:* $\mathbb{H}^{0,1} = T^{0,1}\mathbb{C}^n \cap T^{\mathbb{C}}M$.
- *Dato un gruppo* G *di biolomorfismi di una varietà complessa* X*, ogni* G*-orbita* M *è una varietà CR:* $\mathbb{H}^{0,1} = T^{1,0}X \cap T^{\mathbb{C}}M$.

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Risultati fondamentali

Poincaré (Rend. Palermo,1907):
La varietà CR in generale non sono localmenti equivalenti.

E. Cartan (Annali Math. Pura Appl., Annali S.N.S., 1932):

- classificazione delle varietà CR omogenee di $\mathbb{C}^2$ (non-degeneri)
- problema dell'equivalenza per le ipersuperficî di $\mathbb{C}^2$ (connessione di Cartan).

Chern, Moser (Acta Math. 1974), Tanaka (Japan J. Math. (1976)):

- Generalizzazione al caso di varietà CR di codimensione uno, nondegeneri.

Varietà CR degeneri?

Varietà CR k-nondegeneri

Forma di E.E. Levi di ordine superiore:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} \quad : \quad \mathbb{H}^{0,1} \otimes \overline{\mathbb{H}^{0,1}} \longrightarrow T^{\mathbb{C}}M/\mathbb{H}^{0,1} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(k+1)} \quad : \quad \mathbb{F}^{(k)} \otimes \overline{\mathbb{H}^{0,1}} \longrightarrow \mathbb{F}^{(k-1)} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}/\mathbb{F}^{(k)} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}$$

dove:

$$\mathbb{F}^{(0)} := \mathbb{H}^{0,1}, \qquad \mathbb{F}^{(k+1)} := \{\xi \in \mathbb{F}^{(k)} \mid \mathcal{L}^{(k+1)}(\xi, \overline{\mathbb{H}^{0,1}}) = 0\}.$$

Filtrazione di sottofibrati complessi:

$$\mathbb{H}^{0,1} = \mathbb{F}^{(0)} \supset \mathbb{F}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathbb{F}^{(k)} \supset \cdots \supset 0.$$

Definizione

M si dice k-nondegenere se esiste k (minimo) tale che $\mathbb{F}^{(k)} = 0$.

Varietà CR k-nondegeneri

Forma di E.E. Levi di ordine superiore:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} \quad : \quad \mathbb{H}^{0,1} \otimes \overline{\mathbb{H}^{0,1}} \longrightarrow T^{\mathbb{C}}M/\mathbb{H}^{0,1} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(k+1)} \quad : \quad \mathbb{F}^{(k)} \otimes \overline{\mathbb{H}^{0,1}} \longrightarrow \mathbb{F}^{(k-1)} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}/\mathbb{F}^{(k)} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}$$

dove:

$$\mathbb{F}^{(0)} := \mathbb{H}^{0,1}, \qquad \mathbb{F}^{(k+1)} := \{\xi \in \mathbb{F}^{(k)} \mid \mathcal{L}^{(k+1)}(\xi, \overline{\mathbb{H}^{0,1}}) = 0\}.$$

Filtrazione di sottofibrati complessi:

$$\mathbb{H}^{0,1} = \mathbb{F}^{(0)} \supset \mathbb{F}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathbb{F}^{(k)} \supset \cdots \supset 0.$$

Definizione

M si dice *k-nondegenere* *se esiste k (minimo) tale che $\mathbb{F}^{(k)} = 0$.*

Varietà CR k-nondegeneri

Forma di E.E. Levi di ordine superiore:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} \quad : \quad \mathbb{H}^{0,1} \otimes \overline{\mathbb{H}^{0,1}} \longrightarrow T^{\mathbb{C}}M/\mathbb{H}^{0,1} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(k+1)} \quad : \quad \mathbb{F}^{(k)} \otimes \overline{\mathbb{H}^{0,1}} \longrightarrow \mathbb{F}^{(k-1)} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}/\mathbb{F}^{(k)} \oplus \overline{\mathbb{H}^{0,1}}$$

dove:

$$\mathbb{F}^{(0)} := \mathbb{H}^{0,1}, \qquad \mathbb{F}^{(k+1)} := \{\xi \in \mathbb{F}^{(k)} \mid \mathcal{L}^{(k+1)}(\xi, \overline{\mathbb{H}^{0,1}}) = 0\}.$$

Filtrazione di sottofibrati complessi:

$$\mathbb{H}^{0,1} = \mathbb{F}^{(0)} \supset \mathbb{F}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathbb{F}^{(k)} \supset \cdots \supset 0.$$

Definizione

M si dice k-nondegenere se esiste k (minimo) tale che $\mathbb{F}^{(k)} = 0$.

Definizione

Una varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ *è detta debolmente nondegenere (brevemente DND) in* $p \in M$ *se*

$$\forall Z \in \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), Z_p \neq 0, \exists Z_1 \ldots, Z_\ell \in \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}) : [Z_1, \ldots, [Z_\ell, \overline{Z}] \ldots]_p \notin \mathbb{H}^{0,1} + \overline{\mathbb{H}^{0,1}}.$$

($k = 1$ *corresponde al caso di forma di Levi nondegenere)*

Criterion

Sia M *una varietà CR (localmente) omogenea.*
Allora M *è debolmente degenere (DD) se e solo se esiste*

$$\pi : M \to M'$$

fibrazione CR (locale) equivariante con fibre complesse non banali.

Definizione

Una varietà CR $(M, \mathbb{H}^{0,1})$ *è detta debolmente nondegenere (brevemente DND) in* $p \in M$ *se*

$$\forall Z \in \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}), Z_p \neq 0, \exists Z_1 \ldots, Z_\ell \in \Gamma(\mathbb{H}^{0,1}) : [Z_1, \ldots, [Z_\ell, \overline{Z}] \ldots]_p \notin \mathbb{H}^{0,1} + \overline{\mathbb{H}^{0,1}}.$$

($k = 1$ *corresponde al caso di forma di Levi nondegenere)*

Criterion

Sia M *una varietà CR (localmente) omogenea.*
Allora M *è debolmente degenere (DD) se e solo se esiste*

$$\pi : M \to M'$$

fibrazione CR (locale) equivariante con fibre complesse non banali.

Esempio

La grassmanniana $Gr_{\mathbb{C}}(2,4)$ of 2-piani di $\mathbb{C}^4$ è una varietà a bandiera $F = SL(4,\mathbb{C})/Q$ dove $Q = \{Z \in SL(4,\mathbb{C}) \,|\, Z(\langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{C}}) \subseteq \langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{C}}\}$.

Consideriamo la forma hermitiana simmetrica su $\mathbb{C}^4$ associata alla matrice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $G_0 = \{Z \in SL(4,\mathbb{C}) \,|\, K = Z^* K Z\} \simeq SU(3,1)$.

L'orbita compatta è data da $G_0 \cdot (\langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{C}})$. Questa è una varietà CR di tipo $(3,1)$ con forma di Levi degenere ma DND (2-nondegenere).

Algebre CR

Definizione (–, Nacinovich, J. Algebra (2005))

Un'algebra CR è una coppia di algebre di Lie $(\mathfrak{g}_o, \mathfrak{q})$ *con* $\mathfrak{q}$ *sottoalgebra complessa della complessificazione* $\mathfrak{g}$ *di* $\mathfrak{g}_o$*.*

Sia M una varietà CR (localmente) omogenea. Abbiamo una corrispondenza:

$$M \longleftrightarrow (\mathfrak{g}_o, \mathfrak{q})$$

($\mathfrak{g}$ algebra di automorfismi infinitesimi CR, $\mathfrak{q} = (d\pi^{\mathbb{C}})^{-1}(\mathbb{H}^{0,1}_{x_0}) \subset \mathfrak{g} = T^{\mathbb{C}}_e G_o$)

$$\mathbb{H}^{0,1}_{x_0} \simeq \mathfrak{q}/(\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$$

Criterion

Una varietà CR (localmente) omogenea M *è debolmente degenere (DD) se e solo se esiste una sottoalgebra complessa* $\mathfrak{q}'$ *di* $\mathfrak{g}$ *con* $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q} + \bar{\mathfrak{q}}$*.*

Algebre CR

Definizione (–, Nacinovich, J. Algebra (2005))

Un'algebra CR è una coppia di algebre di Lie $(\mathfrak{g}_o, \mathfrak{q})$ con $\mathfrak{q}$ sottoalgebra complessa della complessificazione $\mathfrak{g}$ di $\mathfrak{g}_o$.

Sia M una varietà CR (localmente) omogenea. Abbiamo una corrispondenza:

$$M \longleftrightarrow (\mathfrak{g}_o, \mathfrak{q})$$

($\mathfrak{g}$ algebra di automorfismi infinitesimi CR, $\mathfrak{q} = (d\pi^{\mathbb{C}})^{-1}(\mathbb{H}^{0,1}_{x_0}) \subset \mathfrak{g} = T^{\mathbb{C}}_e G_o$)

$$\mathbb{H}^{0,1}_{x_0} \simeq \mathfrak{q}/(\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$$

Criterion

Una varietà CR (localmente) omogenea M è debolmente degenere (DD) se e solo se esiste una sottoalgebra complessa $\mathfrak{q}'$ di $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q} + \bar{\mathfrak{q}}$.

Algebre CR

Definizione (–, Nacinovich, J. Algebra (2005))

Un'algebra CR è una coppia di algebre di Lie $(\mathfrak{g}_o, \mathfrak{q})$ *con* $\mathfrak{q}$ *sottoalgebra complessa della complessificazione* $\mathfrak{g}$ *di* $\mathfrak{g}_o$*.*

Sia M una varietà CR (localmente) omogenea. Abbiamo una corrispondenza:

$$M \longleftrightarrow (\mathfrak{g}_o, \mathfrak{q})$$

($\mathfrak{g}$ algebra di automorfismi infinitesimi CR, $\mathfrak{q} = (d\pi^{\mathbb{C}})^{-1}(\mathbb{H}^{0,1}_{x_0}) \subset \mathfrak{g} = T^{\mathbb{C}}_e G_o$)

$$\mathbb{H}^{0,1}_{x_0} \simeq \mathfrak{q}/(\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$$

Criterion

Una varietà CR (localmente) omogenea M *è debolmente degenere (DD) se e solo se esiste una sottoalgebra complessa* $\mathfrak{q}'$ *di* $\mathfrak{g}$ *con* $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q} + \bar{\mathfrak{q}}$*.*

Varietà CR 2-nondegeneri (5-dimensionali)

Teorema (Fels-Kaup, Acta Math. (2008))

Ogni varietà CR di dimensione 5 debolmente degenere (DD) localmente omogenea è localmente CR-equivalente a $F + i\mathbb{R}^3$ dove F è una delle seguenti superfici:

- $F = \mathcal{T} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_3)^2,\ x_3 > 0\}$;
- $F = \{r(\cos t, \sin t, e^{\omega t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\omega > 0$ *arbitrario;*
- $F = \{r(1, t, e^t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$;
- $F = \{r(1, e^t, e^{\theta t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\theta > 2$ *arbitrario;*
- $F = \{c(t) + rc'(t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *dove* $c(t) := (t, t^2, t^3)$.

Teorema (–, Spiro (2012))

Sia M^5 una varietà CR debolmente degenere (DD). Allora esiste una connessione di Cartan (Q, ω) canonica ad essa associata.

Varietà CR 2-nondegeneri (5-dimensionali)

Teorema (Fels-Kaup, Acta Math. (2008))

Ogni varietà CR di dimensione 5 debolmente degenere (DD) localmente omogenea è localmente CR-equivalente a $F + i\mathbb{R}^3$ dove F è una delle seguenti superficî:

- $F = \mathcal{T} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_3)^2,\ x_3 > 0\}$;
- $F = \{r(\cos t, \sin t, e^{\omega t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\omega > 0$ *arbitrario;*
- $F = \{r(1, t, e^t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$;
- $F = \{r(1, e^t, e^{\theta t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\theta > 2$ *arbitrario;*
- $F = \{c(t) + rc'(t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *dove* $c(t) := (t, t^2, t^3)$.

Teorema (–, Spiro (2012))

Sia M^5 una varietà CR debolmente degenere (DD). Allora esiste una connessione di Cartan (Q, ω) canonica ad essa associata.

Varietà CR 2-nondegeneri (5-dimensionali)

Teorema (Fels-Kaup, Acta Math. (2008))

Ogni varietà CR di dimensione 5 debolmente degenere (DD) localmente omogenea è localmente CR-equivalente a $F + i\mathbb{R}^3$ dove F è una delle seguenti superficî:

- $F = \mathcal{T} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_3)^2,\ x_3 > 0\}$;
- $F = \{r(\cos t, \sin t, e^{\omega t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\omega > 0$ *arbitrario;*
- $F = \{r(1, t, e^t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$;
- $F = \{r(1, e^t, e^{\theta t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\theta > 2$ *arbitrario;*
- $F = \{c(t) + rc'(t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *dove* $c(t) := (t, t^2, t^3)$.

Teorema (–, Spiro (2012))

Sia M^5 una varietà CR debolmente degenere (DD). Allora esiste una connessione di Cartan (Q, ω) canonica ad essa associata.

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Varietà (CR) paraboliche

(cfr. J.A.Wolf, *Bull. A.M.S.* (1969))

Dati:

- $F = G/Q$, varietà a bandiera

  (G gruppo complesso semisemplice, Q sottogruppo parabolico)
- $G_0 \subset G$, forma reale di G,

consideriamo la naturale azione di G_0 su F.

Definizione

Una varietà o orbita (CR) **parabolica** *è una G_0-orbita in F.*

Ricordiamo che:

- le G_0-orbite in F sono in numero finito
- solo una di esse è chiusa (compatta)
- le orbite aperte sono semplicemente connesse

Alcuni risultati sulle varietà CR paraboliche:

1. Fibrazioni CR equivarianti con fibre di tipo finito
2. Fibrazioni CR equivarianti con fibre complesse e base DND
3. Strutture CR omogenee su una stessa varietà parabolica
4. Risultati topologici, riguardanti in particolare il gruppo fondamentale.

Data un'orbita CR parabolica

$$M = G_0/I_0 \hookrightarrow F = G/Q$$

abbiamo come algebra CR associata:

$$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}) = (\mathrm{Lie}(G_0), \mathrm{Lie}(Q)).$$

Viceversa, data $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ con $\mathfrak{q}$ sottoagebra parabolica, indichiamo con $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ la varietà CR parabolica corrispondente:

- G gruppo di Lie connesso con algebra di Lie $\mathfrak{g}$,
- Q e G_0 sottogruppi analitici di G con algebre di Lie $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{g}_0$,
- $F = G/Q$,

$M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ è l'orbita di G_0 in $F = G/Q$ passante per il punto $o = eQ$.

Data un'orbita CR parabolica

$$M = G_0/I_0 \hookrightarrow F = G/Q$$

abbiamo come algebra CR associata:

$$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}) = (\mathrm{Lie}(G_0), \mathrm{Lie}(Q)).$$

Viceversa, data $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ con $\mathfrak{q}$ sottoagebra parabolica, indichiamo con $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ la varietà CR parabolica corrispondente:

- G gruppo di Lie connesso con algebra di Lie $\mathfrak{g}$,
- Q e G_0 sottogruppi analitici di G con algebre di Lie $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{g}_0$,
- $F = G/Q$,

$M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ è l'orbita di G_0 in $F = G/Q$ passante per il punto $o = eQ$.

Il sottogruppo di isotropia di $M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ e la sua sottoalgebra di isotropia sono

$$I_0 = G_0 \cap Q, \qquad \mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}.$$

Siano $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ e $M' = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}')$ varietà CR paraboliche con $\mathfrak{i}_0 \subseteq \mathfrak{i}_0{}' := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}'$. Si ha una fibrazione G_0-equivariante:

$$M = G_0/I_0 \xrightarrow{F} M' = G_0/I_0{}'$$

Allora:

- F applicazione CR $\iff$ $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$
- F fibrazione CR $\iff$ $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + (\mathfrak{q}' \cap \bar{\mathfrak{q}}')$.

Il sottogruppo di isotropia di $M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ e la sua sottoalgebra di isotropia sono

$$I_0 = G_0 \cap Q, \qquad \mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}.$$

Siano $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ e $M' = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}')$ varietà CR paraboliche con $\mathfrak{i}_0 \subseteq \mathfrak{i}_0{}' := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}'$. Si ha una fibrazione G_0-equivariante:

$$M = G_0/I_0 \xrightarrow{F} M' = G_0/I_0{}'$$

Allora:

- F applicazione CR $\iff$ $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$
- F fibrazione CR $\iff$ $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + (\mathfrak{q}' \cap \bar{\mathfrak{q}}')$.

Il sottogruppo di isotropia di $M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ e la sua sottoalgebra di isotropia sono

$$I_0 = G_0 \cap Q, \qquad \mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}.$$

Siano $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ e $M' = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}')$ varietà CR paraboliche con $\mathfrak{i}_0 \subseteq \mathfrak{i}_0{}' := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}'$. Si ha una fibrazione G_0-equivariante:

$$M = G_0/I_0 \xrightarrow{F} M' = G_0/I_0{}'$$

Allora:

- F applicazione CR $\iff$ $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$
- F fibrazione CR $\iff$ $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + (\mathfrak{q}' \cap \bar{\mathfrak{q}}')$.

Sottoalgebre paraboliche standard

È possibile scegliere

- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$, CSA of $\mathfrak{g}$
- $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, base di radici semplici

per cui:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}} \quad \text{per un sottoinsieme } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B},$$

dove

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{S}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{h} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}^- \\ supp(\alpha) \cap \mathcal{S} = \emptyset}} \mathfrak{g}_\alpha = \underbrace{\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}^+ \\ supp(\alpha) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset}} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{q}^n} + \underbrace{\mathfrak{h} + \sum_{supp(\alpha) \cap \mathcal{S} = \emptyset} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{q}^r}$$

con $\operatorname{supp}(\alpha) := \{\alpha_j \in \mathcal{B} \mid \alpha = \sum_j n_j \alpha_j,\ n_j \neq 0\}$.

Remark

$$\exists \mathfrak{h}_0,\ CSA\ of\ \mathfrak{g}_0 : \quad \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{i}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}.$$

Nel caso di orbite compatte si può scegliere $\mathfrak{h}_0$ massimalmente non compatta (massimalmente vettoriale). In generale questo non è possibile.

Sottoalgebre paraboliche standard

È possibile scegliere

- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$, CSA of $\mathfrak{g}$
- $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, base di radici semplici

per cui:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}} \quad \text{per un sottoinsieme } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B},$$

dove

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{S}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{h} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}^- \\ \mathit{supp}(\alpha) \cap \mathcal{S} = \emptyset}} \mathfrak{g}_\alpha = \underbrace{\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}^+ \\ \mathit{supp}(\alpha) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset}} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{q}^n} + \underbrace{\mathfrak{h} + \sum_{\mathit{supp}(\alpha) \cap \mathcal{S} = \emptyset} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{q}^r}$$

con $\operatorname{supp}(\alpha) := \{\alpha_j \in \mathcal{B} \mid \alpha = \sum_j n_j \alpha_j,\ n_j \neq 0\}$.

Remark

$$\exists \mathfrak{h}_0, \mathit{CSA\ of}\ \mathfrak{g}_0 : \quad \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{i}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}.$$

Nel caso di orbite compatte si può scegliere $\mathfrak{h}_0$ massimalmente non compatta (massimalmente vettoriale). In generale questo non è possibile.

Sottoalgebre paraboliche standard

È possibile scegliere

- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$, CSA of $\mathfrak{g}$
- $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, base di radici semplici

per cui:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}} \quad \text{per un sottoinsieme } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B},$$

dove

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{S}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{h} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}^- \\ supp(\alpha) \cap \mathcal{S} = \emptyset}} \mathfrak{g}_\alpha = \underbrace{\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}^+ \\ supp(\alpha) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset}} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{q}^n} + \underbrace{\mathfrak{h} + \sum_{supp(\alpha) \cap \mathcal{S} = \emptyset} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{q}^r}$$

con $\operatorname{supp}(\alpha) := \{\alpha_j \in \mathcal{B} \,|\, \alpha = \sum_j n_j \alpha_j,\ n_j \neq 0\}$.

Remark

$$\exists \mathfrak{h}_0, \textit{CSA of } \mathfrak{g}_0 : \quad \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{i}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}.$$

Nel caso di orbite compatte si può scegliere $\mathfrak{h}_0$ massimalmente non compatta (massimalmente vettoriale). In generale questo non è possibile.

Orbite di tipo finito

Definizione

Una varietà CR (M, H) *si dice di tipo finito in* p *se i commutatori delle sezioni di* $\mathrm{Re}(\mathbb{H}^{0,1})$ *generano lo spazio tangente in* p.

Criterion

Criterio per le orbite paraboliche compatte $M(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$ *di tipo finito:*

$$\alpha \in \Phi \setminus \mathcal{R}_\bullet \Leftrightarrow \overline{\alpha} \notin \Phi \cup \mathcal{R}_\bullet$$

Proposizione

Ogni orbita compatta ha una fibrazione CR con fibra di tipo finito e base reale.

Orbite di tipo finito

Definizione

Una varietà CR (M, H) *si dice di tipo finito in* p *se i commutatori delle sezioni di* $\mathrm{Re}(\mathbb{H}^{0,1})$ *generano lo spazio tangente in* p.

Criterion

Criterio per le orbite paraboliche compatte $M(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$ *di tipo finito:*

$$\alpha \in \Phi \setminus \mathcal{R}_\bullet \Leftrightarrow \overline{\alpha} \notin \Phi \cup \mathcal{R}_\bullet$$

Proposizione

Ogni orbita compatta ha una fibrazione CR con fibra di tipo finito e base reale.

Orbite di tipo finito

Definizione

Una varietà CR (M, H) si dice di tipo finito in p se i commutatori delle sezioni di $\mathrm{Re}(\mathbb{H}^{0,1})$ *generano lo spazio tangente in p.*

Criterion

Criterio per le orbite paraboliche compatte $M(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$ di tipo finito:

$$\alpha \in \Phi \setminus \mathcal{R}_\bullet \Leftrightarrow \overline{\alpha} \notin \Phi \cup \mathcal{R}_\bullet$$

Proposizione

Ogni orbita compatta ha una fibrazione CR con fibra di tipo finito e base reale.

Funzioni CR

Teorema (Altomani,–,Nacinovich (2006))

Un'orbita parabolica compatta $M = M(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$ di tipo finito è separabile tramite funzioni CR se e solo se $(\mathfrak{g}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{q}_\Phi)$ è una delle seguenti:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{s}u(p,q),\ 1 \leq p < q, && \Phi = \{\alpha_p\},\ \{\alpha_q\}\,, \\
&\mathfrak{g} = \mathfrak{s}o^*(2\ell), && \Phi = \{\alpha_{\ell-1}\},\ \{\alpha_\ell\}\,, \\
&\mathfrak{g} \textit{ di tipo EIII}, && \Phi = \{\alpha_1\},\ \{\alpha_6\}\,.
\end{aligned}$$

Riduzione a varietà DND

Teorema (Riduzione DND)

Sia $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ *una varietà CR parabolica. Allora esiste una fibrazione CR* G_0*-equivariante*

$$\pi : M \longrightarrow M'$$

con

- *base* $M' = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}')$ *DND*
- *fibre complesse semplicemente connesse (eventualmente disconnesse).*

Le fibre sono banali $\iff$ M *è DND.*

Definizione

La fibrazione $\pi : M \longrightarrow M'$ *è detta riduzione DND di* M*.*

Proposizione

Per una opportuna scelta di una base di radici sempici $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$*, abbiamo:*

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}'}, \quad \mathcal{S}' = \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \bar{\alpha} > 0\}.$$

Riduzione a varietà DND

Teorema (Riduzione DND)

Sia $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ *una varietà CR parabolica. Allora esiste una fibrazione CR* G_0*-equivariante*

$$\pi : M \longrightarrow M'$$

con

- *base* $M' = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}')$ *DND*
- *fibre complesse semplicemente connesse (eventualmente disconnesse).*

Le fibre sono banali $\iff$ M *è DND.*

Definizione

La fibrazione $\pi : M \longrightarrow M'$ *è detta riduzione DND di* M*.*

Proposizione

Per una opportuna scelta di una base di radici sempici $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$*, abbiamo:*

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}'}, \quad \mathcal{S}' = \{\alpha \in \mathcal{S} \,|\, \bar{\alpha} > 0\}.$$

Riduzione a varietà DND

Teorema (Riduzione DND)

Sia $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ *una varietà CR parabolica. Allora esiste una fibrazione CR* G_0*-equivariante*

$$\pi : M \longrightarrow M'$$

con

- *base* $M' = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}')$ *DND*
- *fibre complesse semplicemente connesse (eventualmente disconnesse).*

Le fibre sono banali $\iff$ M *è DND.*

Definizione

La fibrazione $\pi : M \longrightarrow M'$ *è detta riduzione DND di* M*.*

Proposizione

Per una opportuna scelta di una base di radici sempici $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$*, abbiamo:*

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}'}, \quad \mathcal{S}' = \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \bar{\alpha} > 0\}.$$

Indebolimento della struttura CR

Sia

$$M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}) \simeq G_0/I_0 \quad \hookrightarrow \quad F = G/Q$$

Ricordiamo che:

- $\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$,
- $\dim_{CR} M = \dim \mathfrak{q} - \dim(\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$.

Definizione

Sia $\mathfrak{q}_w \subset \mathfrak{q}$, sottoalgebra parabolica minimale tale che:

$$\mathfrak{q}_w \cap \bar{\mathfrak{q}}_w = \mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}\,.$$

La varietà parabolica $M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w)$ è chiamata indebolimento CR di $M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$.

Nota che:

$$M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w) \simeq G_0/I_0 \quad \hookrightarrow \quad F' = G/Q_w. \tag{1}$$

- M_w è diffeomorfa a M come varietà reale
- M_w ha una struttura CR differente data dall'immersione (1).

Indebolimento della struttura CR

Sia

$$M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}) \simeq G_0/I_0 \quad \hookrightarrow \quad F = G/Q$$

Ricordiamo che:

- $\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$,
- $\dim_{CR} M = \dim \mathfrak{q} - \dim(\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$.

Definizione

Sia $\mathfrak{q}_w \subset \mathfrak{q}$, sottoalgebra parabolica minimale tale che:

$$\mathfrak{q}_w \cap \bar{\mathfrak{q}}_w = \mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}} \,.$$

La varietà parabolica $M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w)$ è chiamata indebolimento CR *di $M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$.*

Nota che:

$$M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w) \simeq G_0/I_0 \quad \hookrightarrow \quad F' = G/Q_w. \tag{1}$$

- M_w è diffeomorfa a M come varietà reale
- M_w ha una struttura CR differente data dall'immersione (1).

Indebolimento della struttura CR

Sia

$$M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}) \simeq G_0/I_0 \quad \hookrightarrow \quad F = G/Q$$

Ricordiamo che:

- $\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$,
- $\dim_{CR} M = \dim \mathfrak{q} - \dim(\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}})$.

Definizione

Sia $\mathfrak{q}_w \subset \mathfrak{q}$, sottoalgebra parabolica minimale tale che:

$$\mathfrak{q}_w \cap \bar{\mathfrak{q}}_w = \mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}\,.$$

La varietà parabolica $M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w)$ è chiamata indebolimento CR di $M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$.

Nota che:

$$M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w) \simeq G_0/I_0 \quad \hookrightarrow \quad F' = G/Q_w. \tag{1}$$

- M_w è diffeomorfa a M come varietà reale
- M_w ha una struttura CR differente data dall'immersione (1).

(Indebolimento della struttura CR)

Siccome $\mathfrak{q}_w \subset \mathfrak{q}$, la fibrazione naturale

$$f : M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w) \xrightarrow[CR]{\simeq} M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$$

è un'applicazione CR e un diffeomofismo.

Proposizione

Abbiamo:

$$\mathfrak{q}_w = \mathfrak{q}^n + \mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}.$$

Per una scelta opportuna di una base di radici semplici $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$, otteniamo:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{q}_w = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}^*}, \quad \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \{\alpha \in \mathcal{B} \,|\, \bar{\alpha} > 0, \operatorname{supp}(\bar{\alpha}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\}.$$

Lemma

M_w è *debolmente degenere (DD)* oppure *reale* (i.e. con struttura CR banale).

(Indebolimento della struttura CR)

Siccome $\mathfrak{q}_w \subset \mathfrak{q}$, la fibrazione naturale

$$f : M_w = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_w) \xrightarrow[CR]{\simeq} M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$$

è un'applicazione CR e un diffeomofismo.

Proposizione

Abbiamo:

$$\mathfrak{q}_w = \mathfrak{q}^n + \mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}.$$

Per una scelta opportuna di una base di radici semplici $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$, otteniamo:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{q}_w = \mathfrak{q}_{\mathcal{S}^*}, \quad \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \{\alpha \in \mathcal{B} \,|\, \bar{\alpha} > 0, \operatorname{supp}(\bar{\alpha}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\}.$$

Lemma

M_w è debolmente degenere (DD) oppure reale (i.e. con struttura CR banale).

Teorema di struttura

Teorema (Altomani,–,Nacinovich, Annali S.N.S. (2010))

Sia $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ *una varietà CR parabolica.*
Allora esiste una fibrazione G_0*-equivariante*

$$M \xrightarrow{\Psi} M_{\mathfrak{c}}$$

con

- *spazio base una varietà flag reale* $M_{\mathfrak{c}} = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{c})$
- *fibre complesse, semplicemente connesse.*

Definizione

La varietà parabolica $M_{\mathfrak{c}} = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{c})$ *è detta nucleo reale di* M*.*

Costruzione

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\pi_{(0)}"'] & & & \\
M^{(0)} \arrow[r, "f_{(0)}^{-1}"] & M_w^{(0)} \arrow[d, "\pi_{(1)}"] & & \\
& M^{(1)} \arrow[r, "f_{(1)}^{-1}"] & M_w^{(1)} \arrow[d, "\pi_{(2)}"] & \\
& & M^{(2)} & \cdots \arrow[r, "f_{(r)}^{-1}"] & M_{\mathfrak{c}}
\end{tikzcd}
$$

dove

- le applicazioni verticali sono riduzione DND (applicazioni CR)
- le applicazioni orizzontali sono indebolimenti della struttura (diffeomorfismi)

Ciascuna varietà $M_w^{(j)}$ è DD o reale.

$$\Psi = f_{(r)}^{-1} \circ \pi_{(r)} \circ \cdots \circ f_{(0)}^{-1} \circ \pi_{(0)}$$

Esempio

$$\mathcal{F}^7_{d_1,\dots,d_r} := \{(\ell_1,\dots,\ell_r) \,|\, \ell_1 \subsetneq \ell_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_r \text{ sottospazi di } \mathbb{C}^7, \dim \ell_j = d_j\}.$$

Sia $(e_1,\dots,e_7)$ la base standard di $\mathbb{C}^7$ e siano

$\epsilon_1 = e_1 + ie_7,\ \epsilon_2 = e_2,\ \epsilon_3 = e_3 + ie_6,\ \epsilon_4 = e_4,\ \epsilon_5 = e_5,\ \epsilon_6 = e_3 - ie_6,\ \epsilon_7 = e_1 - ie_7$

Dato $G_0 = SL(7,\mathbb{R})$, consideriamo la varietà parabolica $M = G_0 \cdot \gamma \subset \mathcal{F}^7_{1,2,3,4,5,6,7}$ dove

$$\gamma = (\langle\epsilon_1\rangle,\dots,\langle\epsilon_1,\dots,\epsilon_7\rangle) \in \mathcal{F}^7_{1,2,3,4,5,6,7}$$

La riduzione DND di M è la G_0-orbita $M^{(0)} = G_0 \cdot \gamma_0 \subset \mathcal{F}^7_{2,4}$ attraverso il flag

$$\gamma_0 = (\langle\epsilon_1,\epsilon_2\rangle, \langle\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4\rangle) \in \mathcal{F}^7_{2,4}$$

Esempio (continue)

Continuando la costruzione data dal teorema di struttura otteniamo:

$M^{(1)} = G_0 \cdot \gamma_1 \subset \mathcal{F}^7_{1,3,5,7}$ è la G_0-orbita attraverso il flag

$$\gamma_1 = (\langle \epsilon_2 \rangle, \langle \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_4 \rangle, \langle \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_3, \epsilon_7 \rangle, \langle \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_3, \epsilon_7, \epsilon_6 \rangle) \in \mathcal{F}^7_{1,3,5,6}$$

$M^{(2)} = G_0 \cdot \gamma_2 \subset \mathcal{F}^7_{1,2,4,6}$ è la G_0-orbita attraverso il flag

$$\gamma_2 = (\langle \epsilon_2 \rangle, \langle \epsilon_2, \epsilon_4 \rangle, \langle \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_1, \epsilon_7 \rangle, \langle \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_1, \epsilon_7, \epsilon_3, \epsilon_6 \rangle) \in \mathcal{F}^7_{1,2,4,6}$$

La varietà $M^{(2)}$ ha struttuta CR banale, dunque $M^{(2)} = M_{\mathfrak{c}}$, il nucleo reale di M.

Nucleo reale e space of algebraic arc components

Definizione (J.A. Wolf)

Sia M una G_0-orbita in una varietà a bandiera $F = G/Q$.
Sia $(\theta, \mathfrak{h}_0)$ una coppia di Cartan adattata (contenuta in $\mathfrak{i}_o$) e $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$.
Definiamo:

$$
\begin{aligned}
\delta &= \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{Q}^n \cap \bar{\mathcal{Q}}^n} \alpha, \\
\mathcal{Q}_a &= \{\alpha \in \mathcal{R} \mid (\delta|\alpha) \geq 0\}, \\
\mathfrak{q}_a &= \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_a} \mathfrak{g}^\alpha.
\end{aligned}
$$

La G_0-orbita $M_a = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_a)$ corrispondente all'algebra CR parabolica $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_a)$ è detto space of algebraic arc components di M.

Le fibre di $M \longrightarrow M_a$ sono dette algebraic arc components.

Proposizione

Sia M una G_0-orbita compact in una varietà a bandiera. Allora $M_a = M_c$.

In general $M_a \neq M_c$.

Nucleo reale e space of algebraic arc components

Definizione (J.A. Wolf)

Sia M una G_0-orbita in una varietà a bandiera $F = G/Q$.
Sia $(\theta, \mathfrak{h}_0)$ una coppia di Cartan adattata (contenuta in $\mathfrak{i}_o$) e $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$.
Definiamo:

$$\begin{aligned} \delta &= \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{Q}^n \cap \bar{\mathcal{Q}}^n} \alpha, \\ \mathcal{Q}_a &= \{\alpha \in \mathcal{R} \,|\, (\delta|\alpha) \geq 0\}, \\ \mathfrak{q}_a &= \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_a} \mathfrak{g}^\alpha. \end{aligned}$$

La G_0-orbita $M_a = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_a)$ corrispondente all'algebra CR parabolica $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}_a)$ è detto space of algebraic arc components di M.

Le fibre di $M \longrightarrow M_a$ sono dette algebraic arc components.

Proposizione

Sia M una G_0-orbita compact in una varietà a bandiera. Allora $M_a = M_\mathfrak{c}$.

In general $M_a \neq M_\mathfrak{c}$.

Gruppo fondamentale di una varietà CR parabolica

Teorema

$$M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q}) \text{ varietà parabolica}$$
$$M_{\mathfrak{c}} = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{c}) \text{ nucleo reale di } M.$$

Allora abbiamo la sequenza esatta:

$$\begin{tikzcd} 1 = \pi_1(F) \arrow[r] & \pi_1(M) \arrow[r] & \pi_1(M_{\mathfrak{c}}) \arrow[r] & \pi_0(F) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_0(M) = 1 \\ & & & \frac{W(L_{\mathfrak{c}}, \mathfrak{h}_0)}{W(S_{\mathfrak{c}}, \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}_{\mathfrak{c}})} & \end{tikzcd}$$

dove:

$L_{\mathfrak{c}}$ *fattore riduttivo massimale di* $I_{\mathfrak{c}} = G_0 \cap Q_{\mathfrak{c}}$

$S_{\mathfrak{c}}$ *sottogruppo semisemplice analitico massimale di* $L_{\mathfrak{c}}$

$\mathfrak{h}_0$ *CSA massimalmente non compatta in* $\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{q}$

$W(L_{\mathfrak{c}}, \mathfrak{h}_0) = N_{L_{\mathfrak{c}}}(\mathfrak{h}_0)/Z_{L_{\mathfrak{c}}}(\mathfrak{h}_0)$

$W(S_{\mathfrak{c}}, \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}_{\mathfrak{c}}) = N_{S_{\mathfrak{c}}}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}_{\mathfrak{c}})/Z_{S_{\mathfrak{c}}}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}_{\mathfrak{c}})$.

Il gruppo fondamentale $\pi_1(M_\mathfrak{c})$ del nucleo reale può essere descritto in termini di generatori e relazioni (Wiggerman, Indag. Math. (1998)):

$$\Gamma = \{\xi_\alpha \,|\, \alpha = \bar{\alpha} \in \mathcal{B}, \text{ ha molteplicità } 1\}$$

$$\xi_\alpha = 1 \text{ if } \alpha \in \mathcal{S}_\mathfrak{c}, \quad \xi_\alpha \xi_\beta = \xi_\beta \xi_\alpha^{(\alpha|\check{\beta})} \quad \forall \xi_\alpha, \xi_\beta \in \Gamma.$$

Corollario

Sia $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ una varietà parabolica.
Assumiamo $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ sia somma di ideali semplici $\mathfrak{g}_j$ dei seguenti tipi:

- *complesso*
- *compatto*
- *AII, AIIIa, AIV, BII, CII, DII, DIIIb, EIII, EIV, FII.*

Allora M è semplicemente connessa.

Inoltre, se $\mathfrak{g}_0$ ha fattori semplici di uno dei tipi sopra o dei tipi AIIIb e DIIIa, allora

$$\pi_1(M) \simeq \pi_1(M_\mathfrak{c}).$$

Il gruppo fondamentale $\pi_1(M_\mathfrak{c})$ del nucleo reale può essere descritto in termini di generatori e relazioni (Wiggerman, Indag. Math. (1998)):

$$\Gamma = \{\xi_\alpha \,|\, \alpha = \bar{\alpha} \in \mathcal{B}, \text{ ha molteplicità } 1\}$$

$$\xi_\alpha = 1 \text{ if } \alpha \in \mathcal{S}_\mathfrak{c}, \quad \xi_\alpha \xi_\beta = \xi_\beta \xi_\alpha^{(\alpha|\check{\beta})} \quad \forall \xi_\alpha, \xi_\beta \in \Gamma.$$

Corollario

Sia $M = M(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{q})$ una varietà parabolica.
Assumiamo $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ sia somma di ideali semplici $\mathfrak{g}_j$ dei seguenti tipi:

- *complesso*
- *compatto*
- *AII, AIIIa, AIV, BII, CII, DII, DIIIb, EIII, EIV, FII.*

Allora M è semplicemente connessa.

Inoltre, se $\mathfrak{g}_0$ ha fattori semplici di uno dei tipi sopra o dei tipi AIIIb e DIIIa, allora

$$\pi_1(M) \simeq \pi_1(M_\mathfrak{c}).$$

Varietà CR 2-nondegeneri (5-dimensionali)

Teorema (Fels-Kaup, Acta Math. (2008))

Ogni varietà CR di dimensione 5 debolmente degenere (DD) localmente omogenea è localmente CR-equivalente a $F + i\mathbb{R}^3$ dove F è una delle seguenti superficî:

- $F = \mathcal{T} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_3)^2,\ x_3 > 0\}$;
- $F = \{r(\cos t, \sin t, e^{\omega t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\omega > 0$ *arbitrario;*
- $F = \{r(1, t, e^t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$;
- $F = \{r(1, e^t, e^{\theta t}) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *con* $\theta > 2$ *arbitrario;*
- $F = \{c(t) + rc'(t) \,|\, r \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}\}$, *dove* $c(t) := (t, t^2, t^3)$.

Teorema (–, Spiro (2012))

Sia M^5 una varietà CR debolmente degenere (DD). Allora esiste una connessione di Cartan (Q, ω) canonica ad essa associata.

Bibliografia

- –,M.Nacinovich: Algebras of infinitesimal CR automorphisms. J. Algebra **287** (2005), 234–274
- A. Altomani, –: The CR structure of minimal orbits in complex flag manifolds. J. Lie Theory **16** (2006), 483–530.
- A.Altomani,–: On homogeneous CR manifolds and their CR agebras. Intern. J. Geom. Methods in Mod. Phys. **3** (2006), 1199–1214.
- A.Altomani,–,M.Nacinovich: Orbits of real forms in complex flag manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci (5), Vol. IX (2010), 69–109.
- A.Altomani,–,M.Nacinovich: On homogeneous and symmetric CR manifolds. Bollettino U.M.I. (9) **III** (2010), 221–265.
- A.Altomani,–: A characterization of CR quadrics with a symmetry property. J. Geom. Anal. **22** (2012), 892–909.
- A.Altomani,–,M.Nacinovich: Reductive compact homogeneous CR manifolds. Transformation Groups (in corso di stampa).
- –,A. Spiro: The equivalence problem for 5-dimensional Levi degenerate CR manifolds (preprint, 2012).