# Funzioni regolari di variabile quaternionica

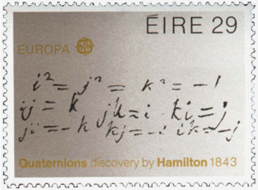
Graziano Gentili

Dipartimento di Matematica e Informatica U.Dini
Università di Firenze

Varietà reali e complesse:
geometria, topologia e analisi armonica

28 febbraio - 3 marzo 2013
Scuola Normale Superiore - Pisa

Consideriamo il corpo $\mathbb{H}$ dei quaternioni




- $q \in \mathbb{H}$ è della forma $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$ con $x_l \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1\}$ è la sfera delle unità immaginarie
- $\mathbb{B} = \{q \in \mathbb{H} : |q| < 1\}$ è la palla aperta
- Per tutti gli $I \in \mathbb{S}$, il simbolo $L_I$ indica la retta complessa $L_I = \mathbb{R} + \mathbb{R}I$

# Funzioni Fueter regolari

**Definizione (R. Fueter, Comm. Math. Helv. 7 (1935), 307-330.)**

*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ un dominio. Una funzione $\mathbb{R}-$differentiabile $f : \Omega \to \mathbb{H}$ si dice Fueter-regolare se*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{q}}(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(f)(q) = 0$$

*per tutti i $q \in \Omega$ (operatore di Cauchy-Fueter).*

- La teoria delle funzioni Fueter regolari è ormai molto ben sviluppata, in molte direzioni ed anche in più variabili.

A. Sudbery, Quaternionic analysis, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85** (1979), 199-225.

# Stranezze delle funzioni Fueter-regolari

- Le seguenti funzioni non sono Fueter-regolari:
  - La funzione identità $I(q) = q$
  - $P(q) = a_0 + qa_1 + \cdots + q^n a_n \ (a_j \in \mathbb{H})$
  - $f(q) = \sum_{n=0,\infty} q^n a_n \ (a_n \in \mathbb{H})$
- L'insieme degli zeri delle funzioni Fueter-regolari può avere dimensione $0, 1$ and 2.
- "Strane" singolarità.
- Prodotto puntuale e composizione non mantengono la Fueter-regolarità.

## Definizione (G.G.–D.Struppa, CRAS, **342** (2006), Adv. Math. **216** (2007))

*$\Omega \subseteq \mathbb{H}$ dominio. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{H}$ è* (slice) regolare *se, per ogni $I \in \mathbb{S}$, la sua restrizione $f_I$ alla retta complessa $L_I = \mathbb{R} + \mathbb{R}I$ ha derivate parziali continue e*

$$\overline{\partial}_I f(x+Iy) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x+yI) = 0,$$

*su $\Omega \cap L_I$ (operatore di Cauchy-Riemann di $L_I$).*

## (Derivata di Cullen)

*La derivata di Cullen di $f$ è*

$$\partial_C(f)(x+yI) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right)(f)(x+yI)$$

- *Polinomi naturali e serie di potenze*

$$f(q) = \sum_{n=0,\infty} q^n a_n, \qquad a_n \in \mathbb{H}$$

*sono regolari (nel loro dominio di convergenza).*

**(Le funzioni regolari ammettono sviluppo in serie)**

*Sia $R > 0$. Una funzione $f : B(0,R) \to \mathbb{H}$ è regolare se, e solo se, ha uno sviluppo in serie di potenze convergente del tipo*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n f(0)$$

*I primi risultati di base di questa teoria riguardano gli "omologhi" di:*

- *Formula di Cauchy*
- *Principio del Massimo Modulo*
- *Stime e disuguaglianze di Chauchy*
- *Teoremi di Liouville e Morera*
- *Struttura dell'insieme degli zeri e Principi di Identità*
- *Singolarità e Funzioni semiregolari ($\cong$ meromorfe)*
- *Teorema della mappa aperta*
- *Analiticità (diverse nozioni)*

*Le funzioni regolari sono buone candidate per giocare il ruolo delle funzioni olomorfe, quando l'ambiente complesso è sostituito da quello dei quaternioni*

I naturali domini di definizione delle funzioni regolari:

**Definizione (Domini slice)**

$\Omega \subseteq \mathbb{H}$ *dominio di* $\mathbb{H}$. *Diciamo che* $\Omega$ *è un* ***dominio slice*** *se:*

- $\Omega \cap \mathbb{R}$ *è non vuoto;*
- $L_I \cap \Omega$ *è un dominio di* $L_I$ *per tutti gli* $I \in \mathbb{S}$.

**Definizione (Domini simmetrici)**

*Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{H}$. *Diciamo che* $\Omega$ *è* ***(assialmente) simmetrico*** *se, per ogni* $x + yI \in \Omega$, *l'intera 2-sfera* $x + y\mathbb{S}$ *è contenuta in* $\Omega$.

- I domini slice simmetrici giocano il ruolo dei domini di olomorfia.

## Teorema (Formula di rappresentazione/estensione)

*$f$ funzione regolare su un dominio slice simmetrico $\Omega$. Fissiamo $x + y\mathbb{S} \subset \Omega$. Per tutti gli $I, J \in \mathbb{S}$*

$$\begin{aligned} &f(x + yJ) = \\ &= \frac{1}{2}[f(x + yI) + f(x - yI)] + J\frac{I}{2}[f(x - yI) - f(x + yI)] = \\ &= b + Jc \end{aligned}$$

## Teorema (Estensione)

*$f$ funzione regolare su un dominio slice $\Omega$. Esiste un'unica estensione $\tilde{f} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{H}$ di $f$ al completamento simmetrico di $\Omega$*

$$\widetilde{\Omega} = \bigcup_{x+yI\in\Omega} (x + y\mathbb{S}).$$

Il prodotto puntuale non mantiene in generale la regolarità:

### Definizione

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n \quad , \quad g(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n b_n.$$

*Il* *prodotto regolare* *di $f$ e $g$ è:*

$$f * g(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right).$$

$$f * g(q) = f(q) g(f(q)^{-1} q f(q))$$

# Zeri di funzioni regolari

$f : \Omega \to \mathbb{H}$ regolare

**(Zeri sferici )**

$I \neq J \in \mathbb{S}$ e $f(x_0 + y_0 I) = f(x_0 + y_0 J) = 0 \iff f(x_0 + y_0\mathbb{S}) = 0$

**(Struttura del luogo di zeri)**

*Se $f \not\equiv 0$ allora il suo luogo di zeri consiste in punti isolati o 2-sfere isolate della forma $S = x + y\mathbb{S}$.*

- Zeri sferici:

**Example**

Se $p \in x + y\mathbb{S}$, allora il polinomio

$$(q - p) * (q - \bar{p}) = [(q - x)^2 + y^2]$$

ha $x + y\mathbb{S}$ come sfera di zeri (di molteplicità 2).

- Zeri isolati:

**Example**

Se $p_1, \ldots, p_n \in x + y\mathbb{S}$ ($p_i \neq \bar{p}_{i+1}$), allora il polinomio

$$(q - p_1) * (q - p_2) * \ldots * (q - p_n)$$

ha solo la radice $p_1$ (di molteplicità $n$).

### Teorema

*$f \not\equiv 0$ funzione regolare in $\Omega$. Fissiamo $x + y\mathbb{S} \subset \Omega$.*
*Allora*

$$f(q) = [(q-x)^2 + y^2]^m (q-p_1) * (q-p_2) * \ldots * (q-p_n) * g(q)$$

*per qualche $p_1, \ldots, p_n \in x + y\mathbb{S}$ ($p_i \neq \bar{p}_{i+1}$) e per qualche funzione regolare $g : \Omega \to \mathbb{H}$ che non ha zeri in $x + y\mathbb{S}$.*

$f : \Omega \to \mathbb{H}$ *regolare,* $f \not\equiv 0$,

- *coniugata regolare:* $f^c(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \bar{a}_n$.
- *La reciproca regolare di* $f$*:*

$$f^{-*}(q) = \frac{1}{f * f^c(q)} f^c(q).$$

*ha la sfera dei "poli" in* $\Omega$.

# Singolarità

## Definizione

*Una funzione $f$ è semiregolare in un dominio slice simmetrico $\Omega$ se:*

- *essa è regolare in un dominio slice simmetrico; $\Omega' \subseteq \Omega$*
- *ogni punto di $\mathcal{S} = \Omega \setminus \Omega'$ è un polo (o una singolarità rimuovibile) per $f$.*

## Teorema

*Sia $f : \Omega \to \mathbb{H}$ semiregolare nel dominio slice simmetrico $\Omega$. Allora:*

- *ogni sfera $x + y\mathbb{S} \subseteq \mathcal{S}$ consiste in poli*
- *ogni polo in $x + y\mathbb{S}$ ha lo stesso ordine, con la possibile eccezione di un polo, che può avere ordine minore*

# Geometria della palla unità

**Definition**

Per ogni $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{H})$, definiamo trasformazione regolare fratta $\mathcal{F}_A$ associata a $A$:

$$\mathcal{F}_A(q) = (qc + d)^{-*} * (qa + b),$$

e poniamo $\mathcal{G} = \{\mathcal{F}_A : A \in GL(2, \mathbb{H})\}$.

- Grouppo degli automorfismi di $\mathbb{H}$ (trasformazioni regolari affini)
- Lemma di Schwarz e Lemma di tipo Schwarz-Pick
- Trasformazioni di Möbius e geometria della palla unità $\mathbb{B}$
- Risultati di rigidità (risultati di tipo Burns-Krantz)

# Una possibile nozione di analiticità

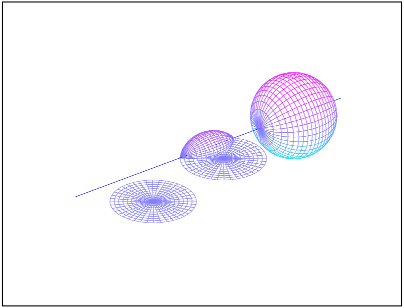
*Usiamo le serie di potenze del tipo:*

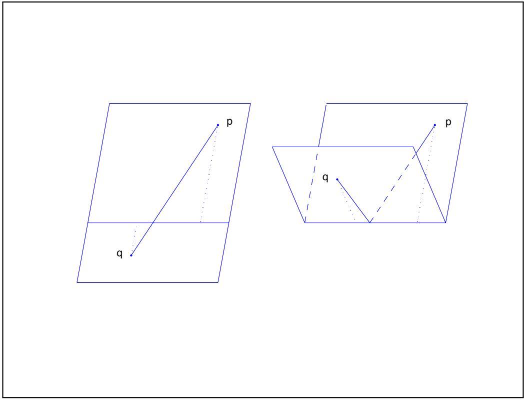
$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (q-p)^{*n} a_n$$

*nel loro dominio di convergenza.*

- Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n$ converge in $B(0, R)$, ci si potrebbe aspettare che la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} (q-p)^{*n} a_n$ convergesse in $B(p, R)$.
- Sorprendentemente, questo non accade.

*Il dominio di convergenza di una serie del tipo $\sum_{n\in\mathbb{N}}(q-p)^{*n}a_n$ è una $\sigma$-palla centrata in $p$, rispetto ad una distanza $\sigma$ non equivalente alla distanza euclidea.*






Esempi di "come calcolare" $\sigma(q, p)$, quando $p$ e $q$ stanno in una stessa retta complessa e quando non ci stanno.

# Una nozione naturale di analiticità

## Definizione ($\sigma$-analiticità)

$\Omega \subseteq \mathbb{H}$ *è* $\sigma$*-aperto.* $f : \Omega \to \mathbb{H}$ *è* *$\sigma$-analitica in $\Omega$* *se, per ogni* $p \in \Omega$*:*

- *esiste una serie di potenza regolare* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(q-p)^{*n}a_n$ *convergente in un* $\sigma$*-intorno* $U_p$ *di* $p$ *in* $\Omega$ *e tale che in* $U_p$

$$f(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(q-p)^{*n}a_n$$

## Teorema

*Una funzione sui quaternioni è regolare, se, e solo se, è* $\sigma$*-analitica nel dominio stesso.*

# Analiticità sferica

- Una nozione di analiticità più forte ed adatta alle funzioni regolari:

**Teorema (Sviluppo sferico)**

*Sia $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una funzione regolare.*

*In un intorno simmetrico della sfera $x_0 + y_0\mathbb{S} \subset \Omega$:*

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [(q - x_0)^2 + y_0^2]^n [C_{2n} + qC_{2n+1}]$$

*dove i coefficienti $C_n$ dipendono solo da $f, x_0, y_0$*

# Il teorema dell'applicazione aperta

Sia $f$ regolare nel dominio slice simmetrico $\Omega$

**Definizione**

*$f(x + y\mathbb{S})$ =costante $\iff$ $x + y\mathbb{S}$ è una sfera degenere per $f$.*

*L'unione $D_f$ di tutte le sfere degeneri per $f$ è l'insieme degenere di $f$ ed ha parte interna vuota.*

**Teorema (Teorema dell'applicazione aperta)**

*Sia $f : \Omega \to \mathbb{H}$ non costante e regolare e sia $D_f$ il suo insieme degenere. Allora $f : \Omega \setminus \overline{D_f} \to \mathbb{H}$ è aperto.*

# Strutture complesse ortogonali su sottoinsiemi di $\mathbb{H}$

**Definizione**

*$(M^4, g)$ sia una varietà riemanniana 4-dimensionale orientata.*

- *Un endomerfismo $\mathcal{J}$ di $TM$ che soddisfa $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{I}$ si dice una struttura quasi complessa ortogonale se è una trasformazione ortogonale (cioè se, $g(\mathcal{J}v, \mathcal{J}w) = g(v, w)$ per ogni $v, w \in T_pM$), e se in più mantiene l'orientazione di $M$.*
- *Una struttura quasi complessa ortogonale si dice una struttura complessa ortogonale, abbreviata come OCS, se $\mathcal{J}$ è integrabile.*

**Teorema (J. C. Wood, Internat. J. Math. 3 (1992))**

*Ogni OCS* $\mathbb{J}$ *su* $\mathbb{H}$ *è costante: esiste* $I \in \mathbb{S}$ *tale che per tutti i* $p \in \mathbb{H}$ *e tutti i* $v \in T_p\mathbb{H} \cong \mathbb{H}$

$$\mathbb{J}_p v = Iv$$

**Teorema (S. Salamon, J. Viaclovsky, Math. Ann. 343 (2009))**

*Sia* $\Lambda$ *un sottoinsieme di* $\mathbb{H}$ *di misura di Hausdorff* 1*-dimensionale* $\mathcal{H}^1(\Lambda) = 0$*. Allora:*

- *Ogni OCS definita su* $\mathbb{H} \setminus \Lambda$ *è conformemente equivalente ad una OCS costante;*
- *il suo dominio di definizione massimale è* $\mathbb{H}$ *oppure* $\mathbb{H} \setminus \{p_0\}$*.*

**Teorema (S. Salamon, J. Viaclovsky, Math. Ann. 343 (2009))**

*Sia $\mathcal{J}$ una OCS di classe $C^1$ su $\mathbb{H} \setminus \Lambda$, dove $\Lambda$ è una circonferenza o una retta, e si assuma che $\mathcal{J}$ non sia conformemente equivalente ad una OCS costante. Allora $\mathcal{J}$ è unica a meno del segno, e $\mathbb{H} \setminus \Lambda$ è un dominio di definizione massimale per $\mathcal{J}$.*

Su $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, si può costruire una OCS $\mathbb{J}$ ponendo

$$\mathbb{J}_q v = I_q v$$

per tutti i $q = x + yI_q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ e per tutti i $v \in T_q(\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$.

Di conseguenza, $\mathbb{J}$ e $-\mathbb{J}$ sono le uniche OCS non costanti su $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$.

PROBLEMI APERTI:

Se $\Lambda \subset \mathbb{H}$ non è né una retta né una circonferenza, l'esistenza e la classificazione delle OCS su $\mathbb{H} \setminus \Lambda$ sono, in generale, problemi aperti.

È possibile usare la classe delle funzioni regolari per affrontare questo problema;

### Teorema

*Sia $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una funzione regolare iniettiva. Allora il differenziale reale $f_*$ è iniettivo e la struttura indotta su $f(\Omega \setminus \mathbb{R})$*

$$\mathbb{J}^f = f_* \, \mathbb{J} \, (f_*)^{-1}$$

*ha la forma*

$$\mathbb{J}^f_{f(q)} v = I_q v$$

*Di conseguenza, $\mathbb{J}^f$ è una OCS su $f(\Omega \setminus \mathbb{R})$.*

## Example

Si descrivono le OCS indotte applicando l'asse reale di $\mathbb{H}$ sulla parabola $\gamma$ tramite la funzione $f(q) = q^2 + qi$.
La funzione $f$ è iniettiva se ristretta a

$$\mathbb{H}^+ = \{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 : x_0 > 0\}$$

oppure ad $\mathbb{H}^-$.
$\partial\mathbb{H}^+ = \partial\mathbb{H}^- = i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R}$ ha per immagine il paraboloide solido (3-dimensionale)

$$\mathfrak{G} = \left\{x_0 + jx_2 + kx_3 : x_0, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_0 \leq 1/4 - (x_2^2 + x_3^2)\right\}$$

e
$f(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H} \setminus \mathfrak{G} = f(\mathbb{H}^-)$. Questi fatti permettono d definire una struttura complessa su un sottoinsieme denso di $\mathbb{H} \setminus \gamma$

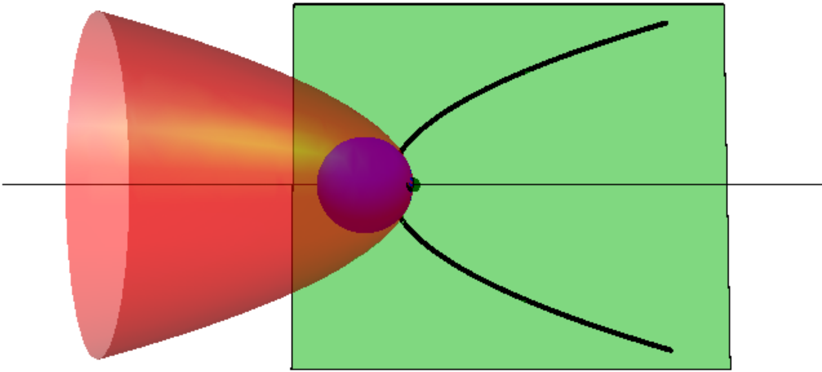
### Teorema

*Sia* $f(q) = q^2 + qi$.

- *Sia* $\mathbb{J}^+$ *la struttura complessa indotta dalla restrizione* $f : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{H}$ *a* $\mathbb{H} \setminus (\gamma \cup \mathfrak{G})$;
- *sia* $\mathbb{J}^-$ *quella indotta dalla restrizione* $f : \mathbb{H}^- \to \mathbb{H}$.

*Allora*

- $\mathbb{H} \setminus (\gamma \cup \mathfrak{G})$ *è il dominio di definizione massimale sia per* $\mathbb{J}^+$ *sia per* $\mathbb{J}^-$.
- *Infatti, sia* $\mathbb{J}^+$, *sia* $\mathbb{J}^-$ *si estendono con continuità al bordo* $\Gamma$ *di* $\mathfrak{G}$ *nel 3-spazio* $\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R}$, *ma nessuna delle due si estende con continuità ad alcun punto di* $\mathfrak{G} \setminus \Gamma$.



# Sollevamenti twistoriali

## Proposizione

*La varietà complessa* $(\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}, \mathbb{J})$ *è biolomorfa ad un sottoinsieme aperto* $\mathcal{Q}^+$ *della quadrica* $Z_0 Z_3 = Z_1 Z_2$ *di* $\mathbb{CP}^3$.

## Teorema

*Sia* $\pi : \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{HP}^1$ *la proiezione twistoriale. Ogni funzione regolare* $f : \Omega \to \mathbb{H}$ *ammette un sollevamento twistoriale* $F$ *a* $\mathcal{O} = \pi^{-1}(\Omega \setminus \mathbb{R}) \cap \mathcal{Q}^+$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{F} & \mathbb{CP}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \setminus \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & f(\Omega \setminus \mathbb{R}) \end{array}$$

Dimostrazione nel caso facile:

$$f(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n (b_n + c_n j),$$

dove $b_n, c_n \in \mathbb{C}$. Se poniamo $q = Q_u^{-1} v\, Q_u = (1+uj)^{-1} v(1+uj)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
[1,\ f(q)] &= \left[1, (Q_u)^{-1} Q_u\ f(q)\right] = \left[Q_u, Q_u \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n a_n\right] = \\
&\left[Q_u,\ \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v^n Q_u a_n\right] = \left[1+uj,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} v^n (1+uj)(b_n + c_n j)\right] \\
&= \left[1+uj,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} v^n (b_n - u\bar{c}_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} v^n (c_n + u\bar{b}_n) j\right] \\
&= \left[1+uj,\ g(v) - u\,\hat{h}(v) + (h(v) + u\,\hat{g}(v))j\right],
\end{aligned}$$

dove

$$g(v) = \sum b_n v^n, \quad h(v) = \sum c_n v^n \quad hag(z) = \overline{g(\bar{z})}, \quad \hat{h}(z) = \overline{h(\bar{z})}$$

sono funzioni olomorfe. dunque la funzione

$$F[1,\ u,\ v,\ uv] = [1,\ u,\ g(v) - u\,\hat{h}(v),\ h(v) + u\,\hat{g}(v)]$$

soddisfa $\pi \circ F = f \circ \pi$, ed è di conseguenza un *sollevamento twistoriale* di $f$.

## Example

Nel caso speciale di $f(q) = q^2 + qi$, il sollevamento twistoriale risulta essere

$$F[st, su, tv, uv] = \left[s^2 t,\ s^2 u,\ t(v^2 + isv),\ u(v^2 - ivs)\right],$$

con $([s, v], [t, u]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, la cui immagine si trova nella quartica $\mathcal{K}$

$$(Z_1 Z_2 - Z_0 Z_3)^2 + 2Z_1 Z_0 (Z_1 Z_2 + Z_0 Z_3) = 0$$

*Una OCS su $\mathbb{H} \setminus \gamma$ non esiste. La dimostrazione di questo fatto segue la linea di un risultato di Viaclovsky, che suggerisce la ragione per la quale è necessario togliere il paraboloide 3-dimensionale solido $\mathfrak{G}$ (oltre a $\gamma$) per poter definire una OCS.*

**Teorema (S. Salamon, J. Viaclovsky, Math. Ann. 343 (2009))**

1. *Non esiste alcuna struttura complessa ortogonale il cui dominio di definizione massimale sia $\mathbb{H} \setminus \gamma$.*
2. *Sia $J$ una OCS definita in $\mathbb{H} \setminus (\gamma \cup \mathfrak{G})$. Se, per ogni $p \in \mathfrak{G}$, i punti limite di $J$ in $p$ sono anche punti limite di $\mathbb{J}^+, \mathbb{J}^-, -\mathbb{J}^+, -\mathbb{J}^-$ in $p$, allora $J$ è una di queste quattro strutture complesse.*

# Calcolo funzionale non commutativo

**(Formula di Cauchy)**

*Se $f : \Omega \to \mathbb{H}$ è regolare, allora, per ogni $q \in U$ e $I \in \mathbb{S}$ si ha*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \Omega_I} (s-q)^{-*} ds_I f(s)$$

*dove $ds_I = -dsI$ e dove $(s-q)^{-*}$ è il nucleo di Cauchy*

$$(s-q)^{-*} = -(q^2 - 2Re(s)q + |s|^2)^{-1}(q - \bar{s}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n s^{-1-n}.$$

$V$ spazio di Banach bilatero su $\mathbb{H}$. $T \in \mathcal{B}(V)$,

**(S-resolvent)**

*Se $||T|| < s$, definiamo l'S-risolvente sinistro usando il nucleo di Cauchy;*

$$S_L^{-1}(s, T) = \sum_{n \geq 0} T^n s^{-1-n}.$$

*Possiamo definire, su un insieme più ampio di $||T|| < s$, l' operatore S-risolvente sinistro*

$$S_L^{-1}(s, T) = \sum_{n \geq 0} T^n s^{-1-n} = -(T^2 - 2Re(s)T + |s|^2\mathcal{I})^{-1}(T - \bar{s}\mathcal{I}).$$

La definizione di *S-spettro* di $T$ è ora possibile:

**(S-spettro)**

$$\sigma_S(T) = \{s \in \mathbb{H} : T^2 - 2Re(s)T + |s|^2\mathcal{I} \text{ non invertibile}\}.$$

Come nel caso classico di Riesz-Dunford, $\sigma_S(T)$ è compatto e non vuoto.

Il calcolo funzionale si definisce ponendo, per $f$ regolare in un intorno $\Omega$ di $\sigma_S(T)$,

$$f(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_I} S_L^{-1}(s,T)ds_I f(s).$$

# Caso delle Algebre di Clifford

In analogia con il caso dei quaternioni si definisce

## Definizione

*Sia $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ un insieme aperto; sia $f : U \to \mathbb{R}_m$ una funzione. Sia $I \in \mathbb{S}$ e sia $f_I$ la restrizione di $f$ al piano complesso $L_I := \mathbb{R} + \mathbb{R}I$. $f$ è una funzione slice monogenica se, per ogni $I \in \mathbb{S}$*

$$\overline{\partial}_I f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + I\frac{\partial}{\partial v}\right) f_I(u + vI) = 0.$$

Si sta sviluppando pienamente una teoria delle funzioni slice monogeniche, che comprende:

- sviluppi in serie centrati nell'origine,
- caratterizzazione dei luoghi di zeri,
- ...
- calcolo funzionale non commutativo

**Teorema (Formula di rappresentazione generalizzata)**

*Sia $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ un dominio slice simmetrico. Sia $f : U \to \mathbb{R}_m$ una funzione slice monogenica. Per ogni $x = x_0 + I_x|\underline{x}| \in U$ :*

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - I_x I\Big] f(x_0 + I|\underline{x}|) + \frac{1}{2}\Big[1 + I_x I\Big] f(x_0 - I|\underline{x}|).$$

- Generalizzazioni della teoria della regolarità slice ad una vasta classe di algebre reali alternative (finito dimensionali), che comprende $\mathbb{H}, \mathbb{O}$ e $\mathbb{R}_m$ per tutti gli $m \geq 1$.
- Queste funzioni hanno proprietà analoghe a quelle descritte nel caso quaternionico; i risultati sui loro luoghi di zeri hanno bisogno di ipotesi più forti.

## Alcuni lavori di ambiente quaternionico

G. Gentili, D.C. Struppa, *A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable*, C.R. Acad. Sci. Paris, **342** (2006), 741–744.

G. Gentili, D.C. Struppa, *A new theory of regular functions of a quaternionic variable*, Adv. Math. **216** (2007), 279–301.

G. Gentili, D.C. Struppa, F.Vlacci, *The fundamental theorem of algebra for Hamilton and Cayley numbers*, Math. Z., **259** (2008), 895-902.

G. Gentili, C. Stoppato, *Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable*, Michigan Math. J., **56** (2008), 655–667.

F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, D. Struppa, *Extension results for slice regular functions of a quaternionic variable,* Adv. Math., **222** (2009), 1793-1808.

F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, and D. C. Struppa, *Non commutative functional calculus: bounded operators*, Complex Anal. Oper. Theory, 4(4)(2010):821–843.

F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, and D. C. Struppa. Non-commutative functional calculus: unbounded operators. J. Geom. Phys., 60(2)(2010):251–259.

G. Gentili, C. Stoppato, *Power series and analyticity over the quaternions*, Math. Ann.,vol. 352(1)(2011), 113–131.

## Alcuni lavori di ambiente quaternionico


- G. Gentili, C. Stoppato, *The open mapping theorem for quaternionic regular functions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 8 (2009), 805-815.
- C. Bisi, G. Gentili, *Möbius transformations and the Poincaré distance in the quaternionic setting*, Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), 2729–2764.
- G. Gentili and I. Vignozzi, *The Weierstrass factorization theorem for slice regular functions over the quaternions*, Ann. Global Anal. Geom., 40(4)(2011):435–466.
- F. Vlacci, *The argument principle for quaternionic slice regular functions*, Michigan Math. J., 60(1)(2011):67–77.
- C. Stoppato, *A new series expansion for slice regular functions*, Advances in Mathematics, vol. 231, Issues 3–4 (2012), 1401-1416.
- C. Bisi, C. Stoppato, *The Schwarz-Pick Lemma for Slice regular Functions*, Indiana University Math. J., vol. 61, n.1 (2012), 297-317.
- C. della Rocchetta, G. Gentili, G. Sarfatti, *The Bohr Theorem for slice regular functions*, Math. Nachr., 285(2012): 2093–2105.
- G. Gentili, S. Salamon, C. Stoppato, *Twistor transforms of quaternionic functions and orthogonal complex structures*, to appear in J. Eur. Math. Soc., arXiv:1205.3513v1 [math.DG].
- F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, *A Cauchy kernel for slice regular functions*, Ann. Global Anal. Geom., **37** (2010), 361-378.

## Alcuni lavori di ambiente anche algebre di Clifford e reali alternative

F. Colombo, I. Sabadini, *On some properties of the quaternionic functional calculus,* Journal of Geometric Analysis, 19 (2009), 601-627.

ooo F. Colombo, I. Sabadini, *The Cauchy formula with s-monogenic kernel and a functional calculus for noncommuting operators,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 373 (2011), 655-679

F. Colombo, I. Sabadini, The quaternionic evolution operator, Advances in Mathematics, 227 (2011), 1772-1805

R. Ghiloni and A. Perotti, *Slice regular functions on real alternative algebras.* Adv. Math., 226(2)(2011):1662–1691.

R. Ghiloni and A. Perotti, *Zeros of regular functions of quaternionic and octonionic variable: a division lemma and the camshaft effect.* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 190(3)(2011):539–551.

R. Ghiloni and A. Perotti, *Volume Cauchy formulas for slice functions on real associative *-algebras*, Complex Var. Elliptic Equ., to appear, doi:10.1080/17476933.2012.709851.

R. Ghiloni, A. Perotti, *Power and spherical series over real alternative *-algebras*, in corso di stampa su Indiana University Mathematics Journal, 2013.

G. Gentili, I. Sabadini, M. Shapiro, F. Sommen, D. C. Struppa, (Eds.), *Advances in Hypercomplex Analysis*, Springer INdAM Series, volume 1, Springer, Berlin/Heidelberg, 2012.

## Due monografie

G. Gentili, C. Stoppato, D. C. Struppa, *Regular functions of a quaternionic variable*, Springer Monographs in Mathematics: Springer Berlin/Heidelberg (2013).

F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa, *Noncommutative functional calculus. Theory and applications of slice hyper-holomorphic functions*, volume 289 of Progress in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.