

Decomposizione di tensori e teoria spettrale

Workshop

*Varietà reali e complesse, geometria, topologia e
analisi armonica*

(28/2 - 3/3, 2013)

SNS, Pisa

Giorgio Ottaviani

Università di Firenze

Il CIME e il CIRM organizzano un corso estivo a Levico Terme
(Italy)

June 10th - 15th, 2013

Combinatorial Algebraic Geometry

Lecturers

- Aldo Conca (Genova)
- Sandra Di Rocco (KTH Stockholm)
- Jan Draisma (TU Eindhoven)
- Bernd Sturmfels (UC Berkeley)
- Filippo Viviani (Roma Tre)



August June 1st - 4th, 2013
Applied Algebraic Geometry

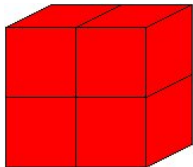


SIAM Conference on
Applied Algebraic Geometry

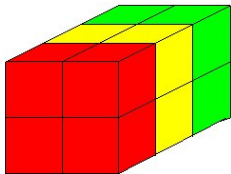
August 1-4, 2013
Colorado State University
Fort Collins, Colorado, USA

Tensori d -dimensionali come generalizzazioni delle matrici ($d=2$)

- Le matrici sono elementi di $V_1 \otimes V_2$, V_i spazi vettoriali



- Vediamo i tensori come elementi di $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$, V_i spazi



vettoriali

- La differenza principale è che in generale $\dim GL(V_1) \times \dots \times GL(V_d) < \dim V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ per $d \geq 3$.
- C'è un'altra differenza più sottile nel caso $d \geq 3$ che spiegheremo più avanti (*rango versus rango bordo*).

Coppie di vettori singolari

La coppia $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ si dice **coppia di vettori singolari** per una matrice rettangolare A di formato $n \times m$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

$$Ax_2 = \lambda x_1 \quad x_1^t A = \lambda x_2^t$$

λ si dice valore singolare.

I valori singolari sono $\sqrt{\lambda_i}$ dove λ_i sono gli autovalori di $A^t A$.

x_2 è autovettore di $A^t A$.

x_1 è autovettore di AA^t .

A generale ha $\min(n, m)$ coppie di vettori singolari.

Singular Value Decomposition, SVD

Se M è una matrice (reale) $m \times n$, la SVD di M è

$$M = U\Sigma V^t$$

dove

U è una matrice ortogonale $m \times m$.

V è una matrice ortogonale $n \times n$.

Σ è una matrice diagonale $m \times n$, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ sulla diagonale, che sono i valori singolari di M .

Le prime r colonne di V sono i vettori singolari destri.

Le prime r colonne di U sono i vettori singolari sinistri.

Se M è simmetrica allora $U = V$ e la SVD si riduce al teorema spettrale $M = UDU^t$.

Migliore approssimazione in rango k

Sia $X_k = \{\text{matrici di rango } \leq k\}$

abbiamo $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$

La norma di Frobenius è $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} \|a_{ij}^2\|}$.

Teorema

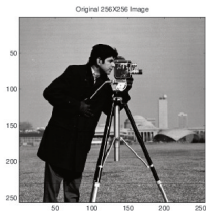
Data una matrice A con valori singolari $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$,

$$\min_{\{B|B \in X_k\}} \|A - B\|_F = \sqrt{\sum_{i \geq k+1} \sigma_i^2}$$

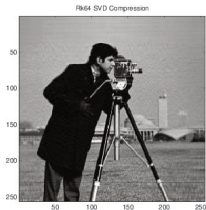
e la matrice B che minimizza è costruita dai k valori singolari maggiori (cioè mandando a zero i restanti valori singolari nella SVD di A).

Immagini create da Emanuele Frandi, Alessandra Papini (Università di Firenze).

L'immagine originale è 256×256



rank 256



all'originale.

rank 64, occupa $\frac{1}{4}$ della memoria rispetto

Le d -ple singolari

Ogni tensore $t \in \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_d}$ definisce per contrazione una funzione f_t sul prodotto $S = S_{m_1-1} \times \dots \times S_{m_d-1}$ delle corrispondenti d sfere.

$$f_t: S \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema (Lim, Qi)

I punti critici di f_t corrispondono ai tensori $(x_1, \dots, x_d) \in S$ tali che

$$t(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d) = \lambda_i x_i$$

Le d -ple che soddisfano l'equazione del teorema si dicono **d -ple singolari**. Generalizzano le coppie di vettori singolari viste nel caso $d = 2$.

Quante sono le d -ple singolari di un tensore generale? Nel formato $(2, 2, 2)$ sono 6, nel formato $(3, 3, 3)$ sono 37. Notiamo che sono in numero maggiore della dimensione dello spazio!

Il numero di d -ple singolari

Teorema (Friedland-O)

Il numero delle d -ple singolari di un tensore generale $t \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m_d})$ su \mathbb{C} di formato (m_1, \dots, m_d) è il coefficiente di $\prod_{i=1}^d t_i^{m_i-1}$ nel polinomio

$$\prod_{i=1}^d \frac{\hat{t}_i^{m_i} - t_i^{m_i}}{\hat{t}_i - t_i}$$

dove $\hat{t}_i = \sum_{j \neq i} t_j$

Corollario

Un tensore generale ha un numero finito di d -ple singolari, con valori singolari distinti.

La migliore approssimazione in rango uno è unica, data ancora dal valore singolare massimo.

I tensori di rango uno sono quelli decomponibili, cioè della forma $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$, costituiscono la varietà di Segre.

Vedremo più avanti i problemi con il rango superiore.

Per la dimostrazione si esprimono le d -ple di vettori singolari come zeri di sezione di un opportuno fibrato vettoriale sulla varietà di Segre. Il calcolo si riduce a una classe di Chern .

Nel formato $(\underbrace{2, \dots, 2}_d)$ il numero delle d -ple singolari è $d!$.

Tabella nel caso 3-dimensionale

Tabella del numero di triple singolari nel formato (d_1, d_2, d_3)

d_1, d_2, d_3	$c(d_1, d_2, d_3)$	
2, 2, 2	6	
2, 2, n	8	$n \geq 3$
2, 3, 3	15	
2, 3, 4	18	$n \geq 4$
3, 3, 3	37	
3, 3, 4	55	
3, 3, n	61	$n \geq 5$
3, 4, 4	104	
3, 4, 5	138	
3, 4, n	148	$n \geq 6$

Il risultato si stabilizza per (a, b, c) con $c \geq a + b - 1$.

Il formato $(a, b, a + b - 1)$ è il *formato bordo*, ben noto nella teoria degli iperdeterminanti. Generalizza il caso quadrato.

Il formato bordo

Per d qualunque, il formato $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_d$ con $k_1 = \max_j k_j$ è detto *formato bordo* se

$$k_1 - 1 = \sum_{i=2}^d (k_i - 1)$$

Questo è il formato dove è possibile definire la diagonale analogamente al caso delle matrici quadrate.

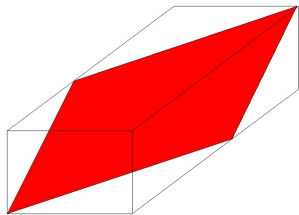
L'esempio fondamentale è dato dal tensore di moltiplicazione

$$S^{k_2-1}\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes S^{k_d-1}\mathbb{C}^2 \rightarrow S^{\sum_i (k_i-1)}\mathbb{C}^2$$

che appartiene a

$$\otimes_{i=1}^d \left(S^{k_i-1}\mathbb{C}^2 \right)$$

Nel formato bordo è ben definita una unica “diagonale” data da elementi $a_{i_1 \dots i_d}$ che soddisfano $i_1 = \sum_{j=2}^d i_j$



(numeriamo gli indici a partire da zero)

Sono definite in modo naturale matrici diagonalizzabili e triangolabili.

Teorema

([Ancona-O] for $d = 3$, [Dionisi] for $d \geq 4$) Sia $A \in \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_d)$ di formato bordo tale che $\text{Det } A \neq 0$. Allora esiste uno spazio vettoriale 2-dimensionale U tale che $SL(U)$ agisce su $V_i \simeq S^{k_i-1}U$ e rispetto a questa azione su $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ abbiamo $\text{Stab}(A)^0 \subset SL(U)$. Inoltre i seguenti casi sono possibili

$$\text{Stab}(A)^0 \simeq \begin{cases} \{0\} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^* \\ SL(2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{(se e solo se } A \text{ corrisponde} \\ \text{al tensore di moltiplicazione precedente)} \end{array}$$

Nel caso simmetrico, un tensore in $S^d(\mathbb{C}^m)$ ha

$$\frac{(d-1)^m - 1}{d-2}$$

vettori singolari.

Per $d = m = 3$ viene 7.

In generale si calcola [Oeding-O]

$$c_{m-1}(T\mathbb{P}^{m-1}(d-2)) = \frac{(d-1)^m - 1}{d-2}$$

La prima dimostrazione della formula nel caso simmetrico è stata data da [Cartwright-Sturmfels] mediante il calcolo di un volume torico.

Nel formato $3 \times 3 \times 3$, i casi possibili per gli zeri di sezione sono

- 7 punti (con molteplicità)
- 1 retta e 3 punti (con molteplicità)
- 1 conica

Questi corrispondono alle configurazioni possibili degli autovettori del tensore.

Decomposizione di Tensori e Rango

Viste le difficoltà a generalizzare la SVD, si dà la seguente

Definizione

Una decomposizione di un tensore f di formato (m_1, \dots, m_d) è

$$f = \sum_{i=1}^r c_i v_{i,1} \otimes \dots \otimes v_{i,d} \quad \text{con } c_i \in \mathbb{C}, \quad v_{i,j} \in \mathbb{C}^{m_j}$$

Definizione

Il **rango** $rk(f)$ è il minimo numero di addendi in una decomposizione di f . Una decomposizione minimale ha $rk(f)$ addendi ed è chiamata CANDECAMP o PARAFAC.

La nota positiva è che la decomposizione minimale è quasi sempre unica per $d \geq 3$, cosa che non accade per $d = 2$.

Il risultato negativo di Lim sulla complessità del calcolo del rango

Lek-Heng Lim ha provato nel 2005 che il calcolo del rango e della decomposizione di un tensore è *NP-hard* per $d \geq 3$.

La migliore approssimazione di rango $\leq r$ può non esistere per motivi geometrici che spieghiamo tra poco.

Nondimeno ci sono algoritmi che lavorano in casi di rango basso e MATLAB packages che calcolano **una decomposizione** che è corretta in molti casi.

Tensori simmetrici come polinomi omogenei

Nel caso $m_1 = \dots = m_d = m$ possiamo considerare tensori simmetrici $f \in S^d \mathbb{R}^m$ $f \in S^d \mathbb{C}^m$. Corrispondono in modo naturale a polinomi omogenei di grado d in m variabili.

I tensori simmetrici di rango uno corrispondono ai polinomi omogenei che sono potenza di una forma lineare (varietà di Veronese).

Decomposizione di un tensore simmetrico (Waring)

Una *decomposizione di Waring* di $f \in S^d V$ è

$$f = \sum_{i=1}^r c_i (l_i)^d \quad \text{with } l_i \in V$$

con r minimale.

r è detto il *rango simmetrico* di f .

Esempio: $7x^3 - 30x^2y + 42xy^2 - 19y^3 = (-x + 2y)^3 + (2x - 3y)^3$
 $\text{rk}_s(7x^3 - 30x^2y + 42xy^2 - 19y^3) = 2$

Hilbert, 1888

Il polinomio generale f di grado 5 in tre variabili ha una unica decomposizione come somma di **7** potenze di forme lineari.

Teorema (Oeding-O)

Costruzione di un algoritmo che calcola la decomposizione di Waring (in rango basso) via autovettori di tensori.

Funziona ad esempio nel caso di Hilbert dei polinomi di grado 5 in 3 variabili.

Si costruisce in aritmetica esatta l'ideale che si annulla sulle soluzioni.

La congettura di Comon

Congettura (Comon)

Per un tensore simmetrico, il rango simmetrico è uguale al rango.

La congettura è dimostrata per forme binarie [Buczynski, Ginensky, Landsberg] e in grado 2 è il classico teorema di Sylvester.

Teorema (Zhang, Ling, Qi, Friedland)

La migliore approssimazione in rango uno di un tensore simmetrico è simmetrica.

Gli insiemi di tensori di rango $\leq r$ non sono chiusi

$$\text{rk}(x^3) = 1$$

$$\text{rk}(x^3 + y^3) = 2$$

$$x^2y = \frac{1}{3} [(x+y)^3 - (x-y)^3 - 2y^3], \text{ da cui } \text{rk}(x^2y) = 3 \text{ ma.....}$$

$$x^2y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+ty)^3 - x^3}{3t}$$

così che un polinomio di rango 3 può essere approssimato da polinomi di rango 2. In questo caso diciamo che il *rango bordo* di x^2y è 2.

Quindi la migliore approssimazione in rango $\leq r$ non è ben definita. Questo dà una spiegazione geometrica di un fenomeno osservato per la prima volta da Dario Bini e approfondito dalla scuola di M. Capovani.

La “speranza” è che il calcolo del rango bordo NON sia NP-hard.

La chiusura della varietà dei tensori di rango $\leq r$ si dice varietà r -secante (alla varietà di Segre nel caso generale, alla varietà di Veronese nel caso simmetrico).

Abbiamo la catena di inclusioni

$$X = \sigma_1(X) \subset \sigma_2(X) \subset \dots \subset \mathbb{P}^N$$

La dimensione attesa di $\sigma_k(X)$ è $\min(k \cdot \dim X + (k - 1), N)$

Il Teorema di Alexander-Hirschowitz

Teorema (Campbell, Terracini, Alexander-Hirschowitz)
[1891] [1916] [1995]

Il polinomio generale $f \in S^d \mathbb{C}^{n+1}$ ($d \geq 3$) ha rango

$$\left\lceil \frac{\binom{n+d}{d}}{n+1} \right\rceil$$

rango generico, con le sole eccezioni

- $2 \leq n \leq 4$, $d = 4$, dove il rango generico è $\binom{n+2}{2}$
- $(n, d) = (4, 3)$, dove il rango generico è 8

Ci sono tabelle analoghe per l'unicità della decomposizione, con due casi eccezionali in più ([Chiantini, Ciliberto, Mella, Ballico]).

Come estendere il teorema di Alexander-Hirschowitz ?

Uno dei problemi più importanti è l'estensione del Teorema di Alexander-Hirschowitz al caso non simmetrico.

Teorema (Catalisano-Geramita-Gimigliano)

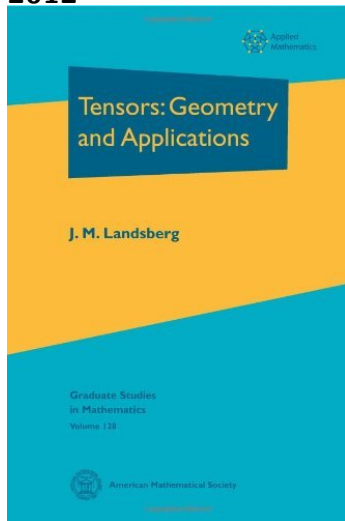
Le varietà secanti di $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$ hanno sempre la dimensione aspettata per $n \neq 4$.

Teorema (Abo-O-Peterson)

Le varietà secanti di $\mathbb{P}^n \times \dots \times \mathbb{P}^n$ hanno sempre la dimensione aspettata escluso al più gli ultimi n valori del rango.

Diamo una congettura sui casi dove la varietà secante non dovrebbe avere la dimensione aspettata.

J.M. Landsberg, *Tensors, Geometry and Applications*, **AMS**, 2012



Thanks !!