

3–varietà di contatto olomorficamente riempibili e libri aperti positivi di genere uno

Paolo Lisca

Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

28 febbraio 2013

4-varietà di Stein

4-varietà di Stein := (W, J, φ)

W = 4-varietà C^∞ non compatta

$J : TW \rightarrow TW$ = struttura complessa integrabile

$\varphi : W \rightarrow [0, +\infty)$ = funzione C^∞ propria

$\lambda := -d\varphi \circ J \in \Omega^1(W)$

$\omega_\varphi := d\lambda \in \Omega^2(W)$ forma simplettica esatta

Esempio: $(W, J, \varphi) = (\mathbb{C}^2, J_0 := i\cdot, \varphi_0(z_1, z_2) := |z_1|^2 + |z_2|^2)$

3-varietà di contatto olomorficamente riempibili

(W, J, φ) 4-varietà di Stein

$c \in (0, +\infty)$ valore regolare per φ

4-varietà di Stein con bordo: $W_c := \varphi^{-1}([0, c]) \subset W$

$\lambda_c := -d\varphi \circ J|_{T\partial W_c} \in \Omega^1(\partial W_c) \Rightarrow \lambda_c \wedge d\lambda_c > 0$ su ∂W_c

$\xi_{\partial W_c} := \ker(\lambda_c) \subset T\partial W_c$ **str. di contatto** positiva su ∂W_c

$\xi_{\partial W_c} = \{\text{rette complesse tangenti}\} \subset T\partial W_c$

(Y, ξ) **olomorficamente riempibile:** $(Y, \xi) \cong (\partial W_c, \xi_{\partial W_c})$

Esempio: $(W, J, \varphi) = (\mathbb{C}^2, J_0, \varphi_0), \Rightarrow (S^3, \xi_{st}) := (\partial W_1, \xi_{\partial W_1})$

Libri aperti, astratti e non

Libro aperto astratto := (Σ, h)

Σ = superficie compatta orientata con $\partial\Sigma \neq \emptyset$

$h \in \text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma) = \{(\text{classi di isotopia di}) \text{ diffeo. rel } \partial\Sigma\}$

$Y_{(\Sigma, h)} := \Sigma \times [0, 1]/(p, 1) \sim (h(p), 0) \cup_{\partial\Sigma \times S^1} \partial\Sigma \times D^2$

3-varietà chiusa e orientata

$L := \partial\Sigma \times 0 \subset \partial\Sigma \times D^2 \subset Y_{(\Sigma, h)}$ **costola** di una d.l.a.

$\pi : \Sigma \times [0, 1]/(p, 1) \sim (h(p), 0) \rightarrow [0, 1]/1 \sim 0 = S^1$

π si estende a $\pi : Y_{(\Sigma, h)} \setminus L \rightarrow S^1$

pagina := $\Sigma_\theta := \overline{\pi^{-1}(\theta)} \subset Y_{(\Sigma, h)}$

$(L, \pi) =$ **decomposizione a libro aperto** di $Y_{(\Sigma, h)}$

Dai libri aperti astratti alle 3-varietà di contatto

Teorema (Alexander)

$Y = 3$ -varietà chiusa, orientata $\Rightarrow Y \cong Y_{(\Sigma, h)}$

Teorema (Giroux)

1. *Esiste una struttura di contatto $\xi_{(\Sigma, h)}$ su $Y_{(\Sigma, h)}$, unica a meno di diffeomorfismi, tale che:*

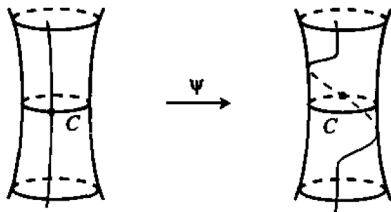
$$\xi_{(\Sigma, h)} = \ker \lambda \subset TY_{(\Sigma, h)}, \quad \lambda|_L > 0, \quad d\lambda|_{\Sigma_\theta} > 0.$$

2. *L'applicazione $(\Sigma, h) \mapsto (Y_{(\Sigma, h)}, \xi_{(\Sigma, h)})$ è suriettiva, ma non iniettiva*

Twist di Dehn

curva semplice chiusa = $C \subset \Sigma$ compatta, orientata, $\partial\Sigma \neq \emptyset$

Twist di Dehn positivo (o destro) :



$$\psi : \nu(C) \cong S^1 \times [0, 1] \rightarrow \nu(C) \cong S^1 \times [0, 1]$$

$$\psi(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$$

Notazione per (la classe di isotopia di) ψ : $\delta_C \in \text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$

Libri aperti positivi e str. di contatto olo. riempibili

$h \in \text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ è **positivo** se $h = \text{id}_\Sigma$, oppure $h = \delta_{C_1} \cdots \delta_{C_k}$

Fatto 1: $h = \delta_{C_1} \cdots \delta_{C_k} \implies \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi = \delta_{\varphi(C_1)} \cdots \delta_{\varphi(C_k)}$

Fatto 2: $(Y_{(\Sigma, \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi)}, \xi_{(\Sigma, \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi)}) \cong (Y_{(\Sigma, h)}, \xi_{(\Sigma, h)})$

\implies la **positività** di $h \in \text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ e la **riempibilità olomorfa** di $(Y_{(\Sigma, h)}, \xi_{(\Sigma, h)})$ sono **proprietà della classe di coniugio** di h .

Teorema (Loi-Piergallini + Giroux)

$h \in \text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ **positivo** $\implies (Y_{(\Sigma, h)}, \xi_{(\Sigma, h)})$ *olo. riempibile*

Una domanda naturale

$$(Y_{(\Sigma,h)}, \xi_{(\Sigma,h)}) \text{ olo. riempibile} \implies h \in \text{Dehn}^+(\Sigma, \partial\Sigma) ?$$

La risposta è:

Sì se $g(\Sigma) = 0$ (Wendl)

No se $g(\Sigma) = 2$ (Baker+Etnyre+Van Horn-Morris e Wand)

Ignota se $g(\Sigma) \neq 0, 2$

Il più semplice caso senza risposta:

Σ di genere uno e con bordo connesso

Il toro bucato

T := superficie orientabile, $g(T) = 1$, $|\partial T| = 1$

$C_1, C_2 \subset T$ c.s.c., $C_1 \cap C_2 = \{1 \text{ punto}\}$

$\text{Diff}^+(T, \partial T)$: **generatori** $x = \delta_{C_1}$, $y = \delta_{C_2}$,

Relazione $xyx = yxy$

Teorema (Murasugi)

Ogni elemento di $\text{Diff}^+(T, \partial T)$ è coniugato ad uno tra:

1. $(xy)^{3d} x^{-m} y^{-1}$, $d \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, 2, 3\}$;
2. $(xy)^{3d} y^m$, $d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$;
3. $(xy)^{3d} x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n}$, $d \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i, n \geq 1$.

Il risultato principale

Teorema (L.)

$h \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$, $Y_{(T,h)}$ L -spazio di Heegaard Floer. Allora $(Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)})$ olo. riempibile $\implies h$ positivo

Teorema (Baldwin + ϵ)

$h \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$, $Y_{(T,h)}$ L -spazio di Heegaard Floer, $(Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)})$ olo. riempibile $\implies h$ coniugato ad uno tra:

1. $(xy)^{3d}x^{-m}y^{-1}$, $d \in \{1, 2\}$, $m \in \{1, 2, 3\}$
2. $(xy)^3y^m$, $m \geq -4$
3. $(xy)^3x^{a_1}y^{-b_1} \dots x^{a_n}y^{-b_n}$, $a_i, b_i, n \geq 1$,
 $4 + \sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i$

Oss.: h è positivo nei casi 1. e 2. (facile verifica), ma non sempre nel caso 3. (esempi non positivi: $(xy)^3x^m y^{-1}xy^{-4-m}$, $m \geq 1$)

Il terzo caso

Per quanto visto, per dimostrare il risultato principale è sufficiente dimostrare:

Teorema (L.)

Sia $h = (xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n} \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$, $a_i, b_i, n \geq 1$.
 $(Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)})$ olo. riempibile $\implies h$ positivo

Osservazioni:

- 1) sebbene esista un algoritmo (Orevkov) per stabilire la positività di un elemento di $\text{Diff}^+(T, \partial T)$, non esiste una classificazione esplicita degli elementi positivi di questo gruppo
- 2) la dimostrazione del teorema fornisce una classificazione degli elementi positivi tra quelli della famiglia infinita dell'enunciato

Una costruzione topologica: prima parte

$$h = (xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n} \quad a_i, b_i, n \geq 1, \quad N := \sum_{i=1}^n b_i \geq 2$$

$$(c_1, \dots, c_N) := (a_1 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_1-1}, a_2 + 2, \dots, a_n + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_n-1})$$

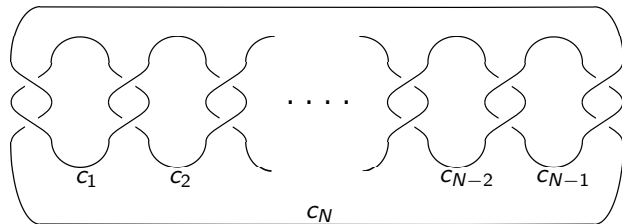
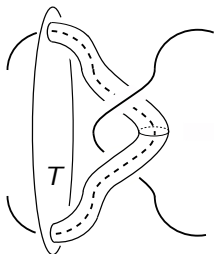


Figura: Presentazione di $Y_{(T,h)}$ tramite chirurgia intera

Una costruzione topologica: seconda parte

La pagina della dec. a libro aperto di $Y_{(T,h)}$ è visibile nella figura:



Inoltre, la chirurgia intera fornisce una 4-varietà orientata

$$X_{(c_1, \dots, c_N)} = B^4 \cup D^2 \times D^2 \cup \dots \cup D^2 \times D^2$$

$$\partial X_{(c_1, \dots, c_N)} = Y_{(T,h)}$$

Una costruzione topologica: terza parte

La forma d'intersezione

$\cdot : H_2(X_{(c_1, \dots, c_N)}; \mathbb{Z}) \times H_2(X_{(c_1, \dots, c_N)}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ è **definita positiva**

(Ozsváth–Szabó): $Y_{(T,h)} = L$ -spazio di Heegaard Floer, $W =$ 4-varietà di Stein con bordo, $(\partial W, \xi_{\partial W}) = (Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)}) \implies$ la forma d'intersezione $\cdot : H_2(W; \mathbb{Z}) \times H_2(W; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ è **definita negativa**

$M := W \cup (-X) =$ 4-varietà chiusa ha forma d'intersezione **definita negativa** con $b_2(M) = \text{rg}(H_2(M; \mathbb{Z})) = 4 + \sum_{i=1}^n a_i$

(Donaldson): $(H_2(M; \mathbb{Z}), \cdot) \cong \mathbb{D}_K = (\mathbb{Z}^K, -I)$, $K = b_2(M)$

L'ostruzione algebrica

Lemma

$$h = (xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n} \quad a_i, b_i, n \geq 1$$

$(Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)})$ olo. riempibile \Rightarrow esiste un'immersione isometrica

$$Q_{-X_{(c_1, \dots, c_N)}} := (H_2(-X_{(c_1, \dots, c_N)}; \mathbb{Z}), \cdot) \hookrightarrow \mathbb{D}_K = (\mathbb{Z}^K, -I)$$

e un elemento (descrivibile esplicitamente) $w \in H_2(-X; \mathbb{Z})$ con $w \cdot w = K$ la cui immagine \bar{w} è **caratteristica**: $\bar{w} \cdot \xi \equiv \xi \cdot \xi \pmod{2}$ per ogni $\xi \in \mathbb{D}_K$

$$(c_1, \dots, c_N) := (a_1 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_1-1}, a_2 + 2, \dots, a_n + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_n-1})$$

$$K = 4 + \sum_{i=1}^n a_i \geq N = \sum_{i=1}^n b_i \geq 2$$

Implicazioni dell'ostruzione algebrica: prima parte

“Blowup” di n-uple di numeri naturali:

$$\downarrow \\ (0, 0)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \\ (0, 0) \leftarrow (1, 1, 1)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (0, 0) \leftarrow (1, 1, 1) \leftarrow (2, 1, 2, 1)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (0, 0) \leftarrow (1, 1, 1) \leftarrow (2, 1, 2, 1) \leftarrow (1, 3, 1, 2, 2)$$

$$\downarrow \\ (1, 3, 1, 2, 2) \leftarrow (2, 3, 1, 2, 3, 1)$$

Proposizione

$Q_{-X_{(c_1, \dots, c_N)}} \hookrightarrow \mathbb{D}_K$ come nel lemma ($N \geq 2$) \Rightarrow esiste

$(0, 0) \leftarrow \overset{\text{blowup}}{\dots} \leftarrow (s_1, \dots, s_N)$ tale che $c_1 \geq s_1, c_2 \geq s_2, \dots, c_N \geq s_N$

Implicazioni dell'ostruzione algebrica: seconda parte

Lemma

$$(0,0) \xleftarrow{\text{blowup}} \cdots \xleftarrow{\beta_1-1} (s_1, \dots, s_N) = s = (\alpha_1 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{\beta_1-1}, \alpha_2 + 2, \dots, \alpha_n + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{\beta_n-1}), \alpha_i \geq -2, \beta_i, n \geq 1$$
$$\implies h(s) = (xy)^3 x^{\alpha_1} y^{-\beta_1} \dots x^{\alpha_n} y^{-\beta_n} = 1 \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$$

dim: $h((0,0)) = (xy)^3 x^{-2} y^{-1} x^{-2} y^{-1}$
 $= (xy)^3 x^{-1} (x^{-1} y^{-1} x^{-1}) x^{-1} y^{-1}$
 $= (xy)^3 (x^{-1} y^{-1} x^{-1}) (y^{-1} x^{-1} y^{-1})$
 $= (xy)^3 y^{-1} x^{-1} y^{-1} x^{-1} y^{-1} x^{-1} = (xy)^3 (xy)^{-3} = 1$

$$s = (\dots, 2 + \alpha_i, \overbrace{2, \dots, 2}^{\beta_i-1}, \dots), \hat{s} = (\dots, 3 + \alpha_i, 1, 3, \overbrace{2, \dots, 2}^{\beta_i-2}, \dots)$$

$$h(s) = \dots x^{\alpha_i} y^{-\beta_i} \dots = \dots x^{\alpha_i+1} x^{-1} y^{-1} y^{-\beta_i+1} \dots =$$
$$\dots x^{\alpha_i+1} (x^{-1} y^{-1} x^{-1}) x y^{-\beta_i+1} \dots =$$
$$\dots x^{\alpha_i+1} y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y^{-\beta_i+1} \dots = h(\hat{s})$$

Implicazioni dell'ostruzione algebrica: terza parte

Rimane da verificare:

$$(0, 0) \xleftarrow{\text{blowup}} \cdots \xleftarrow{\text{blowup}} (s_1, \dots, s_N)$$

$$(c_1, \dots, c_N) = (a_1 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_1-1}, a_2 + 2, \dots, a_n + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_n-1}),$$
$$c_1 \geq s_1, c_2 \geq s_2, \dots, c_N \geq s_N,$$

$$\implies h(c_1, \dots, c_N) = (xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n} \text{ positivo.}$$

Esempio: $h(3, 2, 2, 3, 2, 1) = (xy)^3 xy^{-3} xy^{-2} x^{-1} y^{-1}$

$$h(3, 2, 3, 3, 2, 1) = (xy)^3 xy^{-2} xy^{-1} x^{-1} y^{-1}$$

Fine della dimostrazione

Lemma

$$c = (c_1, \dots, c_N), \quad c' = (c_1, \dots, c_i + 1, \dots, c_N) \implies$$

$$h(c) = w_1 w_2, \quad h(c') = w_1 x w_2$$

per qualche $w_1, w_2 \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$

Per concludere:

$h = w_1 w_2$ positivo

$$w_1 x w_2 = (w_1 w_2)(w_2^{-1} x w_2) = h \cdot (w_2^{-1} x w_2)$$

positivo

Riassumendo

Teorema (L.)

Sia $h = (xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n} \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$, $a_i, b_i, n \geq 1$.
Se $n = b_1 = 1$ h è positivo. Se $N := \sum_{i=1}^n b_i \geq 2$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $(Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)})$ olo. riempibile
2. h positivo

3. $(a_1 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_1-1}, a_2 + 2, \dots, a_n + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_n-1}) \geq (s_1, \dots, s_N)$,
dove $(0, 0) \xleftarrow{\text{blowup}} \dots \xleftarrow{\text{blowup}} (s_1, \dots, s_N)$

Osservazione: in particolare, il teorema caratterizza esplicitamente i diffeomorfismi positivi tra quelli della forma $(xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n}$

Considerazioni finali – 1

Le principali argomentazioni algebriche utilizzate sono state suggerite da **congetture geometriche** “per analogia” con risultati precedenti:

La struttura di contatto standard ξ_{st} su S^3 è invariante sotto l'azione di $U(2)$, e quindi sotto l'azione di

$$G_{p,q} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^q \end{pmatrix} \mid \zeta^p = 1 \right\} \subset U(2)$$

$L(p, q) := S^3/G_{p,q}$ eredita una struttura di contatto $\bar{\xi}_{st}$.

È possibile classificare, a meno di diffeomorfismi, le 4-varietà W soggiacenti alle 4-varietà di Stein con bordo W con $(\partial W, \xi_{\partial W}) = (L(p, q), \bar{\xi}_{st})$

I metodi della suddetta classificazione “suggeriscono” come procedere per ricavare un'analogia classificazione nel caso di $(Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)})$, perlomeno se h è positivo e del tipo visto.

Considerazioni finali – 2

Congettura: $h = (xy)^3 x^{a_1} y^{-b_1} \dots x^{a_n} y^{-b_n} \in \text{Diff}^+(T, \partial T)$
 positivo, $N := \sum_{i=1}^n b_i \geq 2$,

$$(c_1, \dots, c_N) = (a_1 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_1-1}, a_2 + 2, \dots, a_n + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{b_n-1})$$

$$\geq (s_1, \dots, s_N) \xrightarrow{\text{blowup}} \dots \rightarrow (0, 0),$$

$(\partial W, \xi_{\partial W}) = (Y_{(T,h)}, \xi_{(T,h)}) \implies W$ è diffeomorfa a:

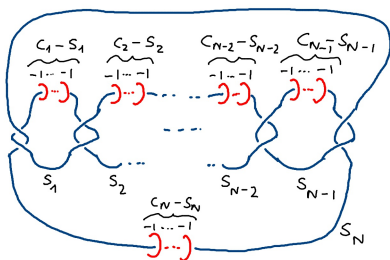


Figura: Chirugia sul link blu = $S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2$