I 50 Piani Proiettivi Finti

Donald Cartwright, University of Sydney
Tim Steger, Università degli Studi di Sassari

che hanno completato un progetto iniziato da

Gopal Prasad, University of Michigan
Sai-Kee Yeung, Purdue University

Febbraio, 2013 Pisa

Un **piano proiettivo finto** è una varietà complessa, liscia, compatta e senza frontiera, di dimensione complessa 2 (quindi dimensione reale 4) che ha gli stessi numeri di Betti del vero piano proiettivo complesso $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, ma che non è olomorficamente equivalente a $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

È nota che ogni piano proiettivo finto è una varietà algebrica, quindi una **superficie algebrica**, in quanto la sua dimensione è 2. Ogni superficie algebriche è Kähler, quindi i problemi discussi da Pontecorvo non sussistono qui. Fra i tanti grandi che hanno studiato le superficie algebriche, Enriques e Kodaira sono forse i due nomi più famosi.

I desiderati numeri di Betti sono

$$b_0 = \dim H^0(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) = 1$$
$$b_1 = \dim H^1(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) = 0$$
$$b_2 = \dim H^2(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) = 1$$
$$b_3 = \dim H^3(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) = 0$$
$$b_4 = \dim H^4(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) = 1$$

La retta complessa proiettiva (la sfera di Gauss) $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ è un generatore di $H_2(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

Una varietà liscia, compatta e senza frontiera, di dimensione reale 4, ha sempre $b_0(X) = b_4(X) = 1$ nonché $b_1(X) = b_3(X)$. Perché $b_1(X) = b_3(X) = 0$, è necessario e sufficiente che $H_1(X)$ sia un gruppo finito.

Per coloro che conoscono qualcosa della teorie delle superficie complesse, si osserva che il **diamante di Hodge** di un piano finto coincide con quello di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

La **dimension di Kodaira** del vero piano proiettivo è $-\infty$, ma la dimensione di Kodaira di un qualsiasi piano finto vale 2, che vuol dire che i piani finti sono di **tipo generale**.

Teorema: Fino ad equivalenze biolomorfe e anti-biolomorfe, esistono precisamente 50 piani proiettivi finti; fino ad equivalenze biolomorfe, precisamente 100.

I calcoli e le stime di

[Prasad, Yeung, 2007] *Fake projective planes*, Invent. Math. **168**, 321–370

[Prasad, Yeung, 2010] *Addendum to "Fake projective planes"*, Invent. Math. **182**, 213–227

mostrano che ciascun piano finto deve giacere in uno di 25 "classi". Inoltre, è messo in evidenza un piano finto esplicito dentro ciascuna classe.

Gli ulteriori calcoli fatti da me e Cartwright stabiliscono esattamente quanti piani finti giaciono in ogni classe. Per ogni piano finto X, si conosce il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$; sono disponibili generatori espliciti per questo gruppo espressi come matrici in $U(2,1)$; anche disponibile è una presentazione del gruppo basata su quelli generatori.

[Cartwright, Steger, 2010] *Enumeration of the 50 fake projective planes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **348**, 11–13.

L'esempio iniziale, noto il **piano finto di Mumford** è stato costruito in:

[Mumford, 1979] *An algebraic surface with K ample,* $K^2 = 9$, $p_g = q = 0$, Am. J. Math. **101**, 233–244.

Oltre a produrre una superficie algebrica di notevole interesse, la costruzione di Mumford è tecnicamente spettacolare.

Costruisce prima un certo spazio rigido analitico su $\mathbf{Q}_2$, il campo dei 2-adici, incollando una collezione di varietà algebrica affine indicizzata dai vertici del palazzo affine associato a $PGL(3, \mathbf{Q}_2)$. Poi, produce un certo sottogruppo discreto e cocompatto di $PGL(3, \mathbf{Q}_2)$, e considera il quoziente relativo dello spazio rigido analitico. Dimostra che questo quoziente è una varietà algebrica liscia su $\mathbf{Q}_2$.

Effettivamente, dimostra che è una varietà algebrica liscia su $\mathbf{Q}$. Sfrutta magie inerenti alla geometria algebrica e osserva che caratteristiche di Eulero e numero di Betti che sa calcolare per la varietà 2-adica diventano ordinari caratteristiche di Eulero e numeri di Betti per la varietà corrispondenti su $\mathbf{C}$, vista come un'ordinaria varietà di dimensione complessa 2.

A proposito, prima di elaborare questo esempio con il palazzo di $PGL(3, \mathbf{Q}_2)$, Mumford ha elaborato alcuni esempi analogi con i palazzi di $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$, che non sono altri che alberi omogenei.

[Mumford, 1972] *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Math. **24**, 129–174.

Successivamente al lavoro di Mumford di 1979, due nuovi esempi sono stati evidenziati in:

[Ishida, Kato, 1998] *The strong rigidity theorem for non-archimedean uniformization*, Tohoku Math. J. **50**, 537–555.

sulla base di due nuovi sottogruppi discreti di $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{Q}_2)$ trovati in:

[Cartwright, Mantero, Steger, Zappa, 1993] *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type* $\widetilde{A}_2$ *I and II.*, Geometriae Dedicata **47** (1993), 143–166 and 167–223.

È banale vedere che questi gruppi condividono le proprietà rilevanti del gruppo utilizzato da Mumford. Il lavoro di Ishida e Kato è dedicato soprattutto a dimostrare che il vecchio piano finto e i due nuovi piani finti non tutti inequivalenti.

In fine si è trovato un altro piano finto:

[Keum, 2006] *A fake projective plane with an order 7 automorphism*, Topology **45**, 919–927.

Il piano finto di Keum è un quoziente di indice finito di un ricoprimento di indice finito del piano finto di Mumford.

Rimanevano a scoprire 46 dei 50 piani finti, e questi sono stati scoperti con l'approccio proposto e sviluppato da Prasad e Yeung.

Sulla base della dimostrazione della congettura di Calabi:

[Yau, 1978] *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I.*, Comm. Pure Appl. Math. **31**, 339–411.

è noto che il ricoprimento universale di un qualsiasi piano finto, X, è olomorficamente equivalente alla boccia unità $B(\mathbf{C}^2)$. Dunque $\pi_1(X)$ agisce liberamente, discretamente e olomorficamente su $B(\mathbf{C}^2)$.

Cos'è il gruppo di automorfismi biolomorfici di $B(\mathbf{C}^2)$?

Il gruppo $U(2,1)$ agisce linearmente su $\mathbf{C}^3$ e preserva la forma unitaria $|z|^2 = -|z_1|^2 - |z_2^2| + |z_3|^2$. In particolare, preserva l'insieme dei vettori di norma positiva:

$$\{z \in \mathbf{C}^3\,;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 < |z_3|^2\}$$

La versione proiettiva di questo insieme (l'insieme delle classi d'equivalenza relativa a moltiplicazioni per scalari) non è altra che $B(\mathbf{C}^2)$. Così si ottiene la nota azione di $U(2,1)$ su $B(\mathbf{C}^2)$. Il nucleo di questa azione è costituito dalle matrici scalari di $U(2,1)$. Il quoziente di $U(2,1)$ per quel nucleo è noto $\mathrm{PU}(2,1)$.

Non è difficile dimostrare che ogni automorfismo biolomorfico di $B(\mathbf{C}^2)$ appartiene a $\mathrm{PU}(2,1)$; il gruppo di automorfismi biolomorfici di $B(\mathbf{C}^2)$ è esattente $\mathrm{PU}(2,1)$.

A volontà, si può vedere $\mathrm{PU}(2,1)$ nella forma alternativa di:

$$\mathrm{PSU}(2,1) = \mathrm{SU}(2,1)/\{1, \omega, \omega^2\} \text{ dove } \omega = e^{2\pi i/3}.$$

Perchè gruppo fondamentale $\pi_1(X) \subset \mathrm{PU}(2,1)$ è discreto. In quanto X è compatto, $\pi_1(X)$ è **cocompatto** dentro $\mathrm{PU}(2,1)$: $\pi_1(X)\backslash \mathrm{PU}(2,1)$ è compatto. È detto che $\pi_1(X)$ è un **reticolo uniforme** di $\mathrm{PU}(2,1)$.

Se un elemento di $PU(2,1)$ ha ordine finito, fissa un punto in $B(\mathbf{C}^2)$. Questo è facile verificare direttamente; segue anche dal fatto che la metrica Riemanniana invariante su $B(\mathbf{C}^2)$ ha delle curvature sezionali negativi. Poiché $\pi_1(X) \subseteq \mathrm{PU}(2,1)$ agisce liberamente su $B(\mathbf{C}^2)$, non può avere elementi di ordine finito.

Il Teorema di Hurewicz asserisce:

$$H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

l'abelianizzazione di $\pi_1(X)$. Questa deve essere finita.

Riassunto: cerchiamo dei gruppi $\pi_1(X) \subset \mathrm{PU}(2,1)$ tale che:

- $\pi_1(X)$ è un reticolo uniforme in $\mathrm{PU}(2,1)$,
- $\pi_1(X)$ non ha elementi d'ordine finito,
- $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ è finito.

Vice versa, se identifichiamo un tale reticolo in $\mathrm{PU}(2,1)$, allora il quoziente relativo di $B(\mathbf{C}^2)$ è una varietà complessa di dimensione 2, liscia, compatta, e senza frontiera con $b_0(X) = b_4(X) = 1$ and $b_1(X) = b_3(X) = 0$.

E per quanto riguarda $b_2(X)$?

Secondo il Principio di Proporzionalità di Hirzebruch (il quale era un precursore del Teorema dell'Indice di Atiyah–Singer, e ormai può esserne considerato una consequenza) la caratteristica di Eulero di un quoziente di $B(\mathbf{C}^2)$ è proporzionale al suo volume:

$$b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - b_3(X) + b_4(X) = \chi(X) = 3\,\mathrm{vol}(X)$$

dove l'elemento di volume su X è quello ottenuto dall'elemento invariante su $B(\mathbf{C}^2)$. Quando X è un piano finto $\chi(X) = 3$, quindi $\mathrm{vol}(X) = 1$.

Si scrive $\mathrm{covol}(\pi_1(X))$ per il volume di un dominio fondamentale per l'azione di $\pi_1(X)$ su $B(\mathbf{C}^2)$; ciò significa che $\mathrm{vol}(X) = \mathrm{covol}(\pi_1(X))$.

Dunque, se $\pi_1(X) \subset \mathrm{PU}(2,1)$ soddisfa:

- $\pi_1(X)$ è un reticolo uniforme in $\mathrm{PU}(2,1)$,
- $\pi_1(X)$ non ha elementi d'ordine finito,
- $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ è finito, e
- $\mathrm{covol}(\pi_1(X)) = 1$

allora X, il quoziente relativo di $B(\mathbf{C}^2)$, è una varietà complessa liscia, compatta, senza frontiera, di dimensione complessa 2, e con $b_0(X) = b_4(X) = 1$, $b_1(X) = b_3(X) = 1$, e $\chi(X) = 3$. Come consequenza $b_2(X) = 1$. In breve, X è un piano proiettivo finto.

Ecco la normalizzazione del elemento di volume su $B(\mathbf{C}^2)$ che fa funzionare il Principio di Hirzebruch:

$$r = \operatorname{arctanh}|z| = \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

$$\Theta = z/|z| \in S^3$$

$$d\Theta = \text{la normale misura su } S^3\text{, con volume totale}{=}2\pi^2$$

$$d\,\mathrm{vol}(z) = \frac{2}{\pi^2}\sinh^3 r\cosh r\,dr\,d\Theta$$

Si noti che $r = d_{\mathsf{inv}}(0,z)$ è la distanza invariante fra 0 e z.

Il gruppo unitario $U(3)$ agisce su $\mathbf{C}^3$, e questa azione induce un'azione sul vero piano proiettivo, $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Le seguenti formule analoghe danno l'elemento di volume su $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ invariante relativo all'azione di $U(3)$.

$$
\begin{aligned}
r' &= \arctan |z| \\
\Theta &= z/|z| \in S^3 \\
d\Theta &= \text{la solita misura su } S^3\text{, con volume totale} = 2\pi^2 \\
d\,\mathrm{vol}(z) &= \frac{2}{\pi^2} \sin^3 r' \cos r'\, dr'\, d\Theta
\end{aligned}
$$

dove ormai $z \in \mathbf{C}^2$, il piano affine, visto come un sottoinsieme di piena misura di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Con questa normalizzazione risulta che $\mathrm{vol}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C})) = 1$, onde $3 = \chi(\mathbf{P}^2(\mathbf{C})) = 3\,\mathrm{vol}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))$.

Reticoli uniformi **non aritmetici** in $PU(2,1)$ sono mostrati in

[Mostow, 1980] *Mostow, G. D. On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space*, Pacific J. Math. **86**, 171–276.

e discussi in lavoro successivo da Mostow e Deligne. Questi esempi sono affascinanti, ma *non* sono rilevanti allo studio dei piani proiettivi finti.

[Klingler, 2003] *Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l'arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les 'faux plans projectifs'*, Invent. Math. **153**, 105–143.

e

[Yeung, 2004] *Integrality and arithmeticity of co-compact lattices corresponding to certain complex two-ball quotients of Picard number one*, Asian J. Math. **8**, 107–130.

dimostrano indipendentemente che $\pi_1(X) \subset \mathrm{PU}(2,1)$ è necessariamente un reticolo **aritmetico** ogniqualvolta X è un piano finto.

Si dice che $\pi_1(X)$ è “aritmetico” quando può essere costruito in un certo modo alquanto complicato. Il punto di partenza per la costruzione è un gruppo algebrico lineare definito su $\mathbf{Q}$ tale che il gruppo dei suoi punti su $\mathbf{R}$ è isomorfo a $SU(2,1) \times K$ con K compatto.

In fondo tutti i reticoli aritmetici nascono da un singolo esempio di base, cioè $SL(n,\mathbf{Z}) \subset SL(n,\mathbf{Q}) \subset SL(n,\mathbf{R})$. Dare il significato di “nascere da” equivale a dare la definizione precisa di “reticolo aritmetico”.

Almeno in principio si possono elencare i reticoli aritmetici massimali di $PU(2,1)$. Per cominciare, serve un elenco delle coppie (k,ℓ) tale che $\mathbf{Q} \subset k \subset \ell$ è una torre di estensioni algebriche, $[\ell : k] = 2$, k è totalemente reale, e ℓ è totalmente complesso.

Per i reticoli aritmetici, c'è la Formula di Prasad per il covolume:

[Prasad, 1989] *Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **69**, 91–117

Usando quella formula da strumento, Prasad e Yeung hanno costruito un elenco di 25 sottogruppi aritmetici *massimali*, $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{PU}(2,1)$ con l'assicurazione che tutti i $\pi_1(X)$ da scoprire si trovano come sottogruppi di uno di questi.

Questo è possibile perché quasi tutti i sottogruppi aritmetici massimali di $\mathrm{PU}(2,1)$ sono troppo rarefatti — hanno covolume troppo grande.

Per ciascuno dei 25 sottogruppi aritmetici massimali $\tilde{\Gamma}$. identificati da Prasad e Yeung, Cartwright e io abbiamo

- utilizzato un calcolatore per cercare elementi di $\tilde{\Gamma}$,
- tramite il prodotto, costruito molti elementi di $\tilde{\Gamma}$, ma restringendoci a elementi che non spostano troppo $0 \in B(\mathbf{C}^2)$,
- tramite integrazione numerica, calcolato il covolume del gruppo generato dagli elementi già trovati,
- e in questa maniera verificato che il gruppo da loro generato coincide con $\tilde{\Gamma}$.

Per questi passi, abbiamo scritto vari programmi in `C`.

Poi abbiamo

- calcolato numericamente il raggio del dominio fondamentale di Dirichlet per $\tilde{\Gamma}$ centrato a $0 \in B(\mathbf{C}^2)$,
- e con questo costruito un elenco delle classi di coniugazione degli elementi di ordine finito,
- nonché un insieme di relazione sufficiente a dare una presentazione di $\tilde{\Gamma}$,
- la quale abbiamo semplificato un poco con una combinazione di metodi automatici e manuali.

Tutto ciò è stato fatto con ulteriori programmi scritti in `C`, più altri scritti per il sistema `MAGMA`

Per ultimo, abbiamo

- con `MAGMA`, `GAP`, `lowx`, e/o programmi in `C`, trovato tutti i sottogruppi di $\tilde{\Gamma}$ di covolume 1,
- e determinato quali di loro erano privi di elementi di ordine finito,
- e con abelianizzazioni finiti.

Di questi calcoli, gli ultimi due sono previsti in `MAGMA` e `GAP`, e vanno molto veloce.