Superfici di curvatura media costante

Barbara Nelli

Università dell'Aquila

28 febbraio 2013

Scuola Normale Superiore

Varietá reali e complesse: geometria, topologia e analisi armonica.

Tre-varietà omogenee semplicemente connesse

Tre-varietà omogenee semplicemente connesse

- La dimensione del gruppo di isometria è 6: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$.

Tre-varietà omogenee semplicemente connesse

- La dimensione del gruppo di isometria è 6: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$.
- La dimensione del gruppo di isometria è 4: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3, Sfere di Berger, $\widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$.

Tre-varietà omogenee semplicemente connesse

- La dimensione del gruppo di isometria è 6: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$.
- La dimensione del gruppo di isometria è 4: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3, Sfere di Berger, $\widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$.
- La dimensione del gruppo di isometria è 3: Sol_3.

Tre-varietà omogenee semplicemente connesse

- La dimensione del gruppo di isometria è 6: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$.
- La dimensione del gruppo di isometria è 4: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3, Sfere di Berger, $\widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$.
- La dimensione del gruppo di isometria è 3: Sol_3.

I primi lavori (di nuova generazione) sul tema sono: [... - Rosenberg, 2002], [Rosenberg, 2002] che riguardano superfici minime in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Molti altri, in seguito...

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.
- Esistenza di un differenziale quadratico di tipo Hopf.

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.
- Esistenza di un differenziale quadratico di tipo Hopf.
- Corrispondenza di tipo Lawson nel caso di gruppo di isometria di dimensione quattro.

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.
- Esistenza di un differenziale quadratico di tipo Hopf.
- Corrispondenza di tipo Lawson nel caso di gruppo di isometria di dimensione quattro.
- Proprietà delle funzioni coordinate e della mappa di Gauss di una superficie minima (armonicità, olomorfia).

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.
- Esistenza di un differenziale quadratico di tipo Hopf.
- Corrispondenza di tipo Lawson nel caso di gruppo di isometria di dimensione quattro.
- Proprietà delle funzioni coordinate e della mappa di Gauss di una superficie minima (armonicità, olomorfia).
- Teoremi del semispazio.

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.
- Esistenza di un differenziale quadratico di tipo Hopf.
- Corrispondenza di tipo Lawson nel caso di gruppo di isometria di dimensione quattro.
- Proprietà delle funzioni coordinate e della mappa di Gauss di una superficie minima (armonicità, olomorfia).
- Teoremi del semispazio.
- Teoremi di tipo Schoen per le superfici minime.

Alcuni temi affrontati

- Produzione di esempi di curvatura media costante (di rotazione, grafici).
- Teoremi di tipo Hopf, Alexandrov e Bernstein.
- Esistenza di un differenziale quadratico di tipo Hopf.
- Corrispondenza di tipo Lawson nel caso di gruppo di isometria di dimensione quattro.
- Proprietà delle funzioni coordinate e della mappa di Gauss di una superficie minima (armonicità, olomorfia).
- Teoremi del semispazio.
- Teoremi di tipo Schoen per le superfici minime.
- Stabilità.

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

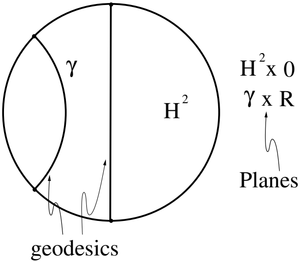
- $\mathbb{H}^2$ è il piano iperbolico. Consideriamo il modello del disco.

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

- $\mathbb{H}^2$ è il piano iperbolico. Consideriamo il modello del disco.
- La metrica in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ è $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2} + dt^2$

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

- $\mathbb{H}^2$ è il piano iperbolico. Consideriamo il modello del disco.
- La metrica in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ è $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2} + dt^2$
- I piani totalmente geodetici sono $\gamma \times \mathbb{R}$ con γ geodetica in $\mathbb{H}^2$ e tutti gli $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$.



Grafici completi minimi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Grafici completi minimi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Sia Γ una curva di Jordan rettificabile in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ che sia un grafico verticale. Allora, esiste un grafico minimo verticale su $\mathbb{H}^2$ che ha Γ come bordo asintotico. Il grafico è unico. [$\cdots$, Rosenberg, 2002]

Grafici completi minimi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Sia Γ una curva di Jordan rettificabile in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ che sia un grafico verticale. Allora, esiste un grafico minimo verticale su $\mathbb{H}^2$ che ha Γ come bordo asintotico. Il grafico è unico. [$\cdots$, Rosenberg, 2002]

- Non si può avere un teorema di tipo Bernstein per le superfici minime in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Grafici completi minimi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Sia Γ una curva di Jordan rettificabile in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ che sia un grafico verticale. Allora, esiste un grafico minimo verticale su $\mathbb{H}^2$ che ha Γ come bordo asintotico. Il grafico è unico. [$\cdots$, Rosenberg, 2002]

- Non si può avere un teorema di tipo Bernstein per le superfici minime in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.
- Un teorema di tipo Bernstein è vero per grafici orizzontali [Sa Earp, 2012].

Catenoidi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$: C_d

Catenoidi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$: C_d

- Per ogni $d > 0$, esiste una superficie C_d minima, completa, rotazionale embedded, omeomorfa ad un anello, invariante per riflessioni rispetto alla fetta $t = 0$, con bordo asintotico due cerchi orizzontali in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a distanza $h(d)$, dove

$$\lim_{d \longrightarrow 0} h(d) = 0, \quad \lim_{d \longrightarrow \infty} h(d) = \pi.$$

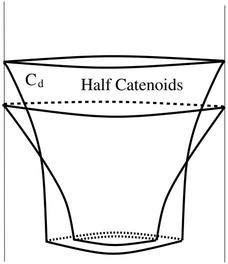
[...-Rosenberg, 2002]

Catenoidi in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$: C_d

- Per ogni $d > 0$, esiste una superficie C_d minima, completa, rotazionale embedded, omeomorfa ad un anello, invariante per riflessioni rispetto alla fetta $t = 0$, con bordo asintotico due cerchi orizzontali in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a distanza $h(d)$, dove

$$\lim_{d \longrightarrow 0} h(d) = 0, \quad \lim_{d \longrightarrow \infty} h(d) = \pi.$$

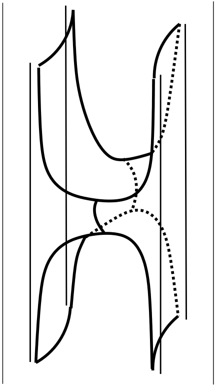
[...-Rosenberg, 2002]



Superfici Modello

- Una superficie modello è un anello minimo propriamente embedded, con curvatura totale $\int_M K_{gauss} = -4\pi$, simmetrico rispetto ad una fetta orizzontale, con due fini planari.

[Pyo 2011], [Morabito-Rodriguez 2012]

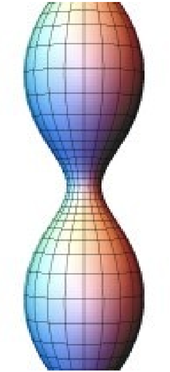


Model Surface

go to Theorem 2

Superfici rotazionali con $H \neq 0$ costante

- Per $H > \frac{1}{2}$ le rotazionali sono compatte o periodiche in direzione verticale (tipo Delaunay) [Hsiang, Hsiang, 1989], [Pedrosa, Ritoré, 1999]



Superfici rotazionali con $H \neq 0$ costante

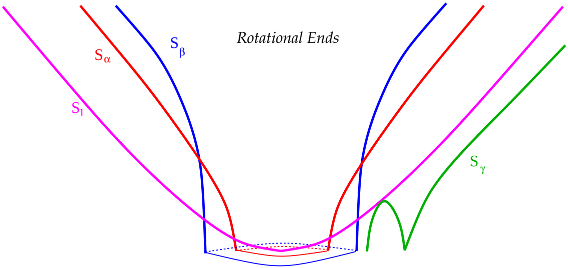
- Per ogni $H \in (0, \frac{1}{2})$, esiste una famiglia ad un parametro di superfici di rotazione S_t :

[Sa Earp, Toubiana, 2005]

$S_\alpha \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{\rho}{2}}$, $\alpha < 1$

$S_1 \longrightarrow$, $e^{\frac{\rho}{2}}$ - Per $H = \frac{1}{2}$ è grafico di $t = 2\cosh\frac{\rho}{2}$

S_γ non embedded se $\gamma > 1$



1. Tre-varietà omogenee semplicemente connesse
   - Elenco
   - Tipologia di alcuni temi affrontati

2. $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
   - Notazioni ed esempi
   - Superfici minime in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e mappe armoniche
   - Su una congettura di R. Schoen
   - Superfici con H costante e una fine
   - Superfici con H costante e con due fini
   - Superfici minime ($H = 0$) con due fini

Le *coordinate* di una superficie minima in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ sono *mappe armoniche*

- Una superficie minima in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ può essere parametrizzata da un'immersione conforme

$$X = (F, h) : M \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

dove M è una superficie di Riemann, $F : M \longrightarrow \mathbb{H}^2$ è una mappa armonica e $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica.

Teorema

Esiste un diffeomorfismo armonico tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}^2$ [Collin-Rosenberg, 2007]

Teorema

Esiste un diffeomorfismo armonico tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}^2$ [Collin-Rosenberg, 2007]

- Ciò contraddice la congettura di R. Schoen [Schoen, 1988] che sostiene che non esiste un tale diffeomorfismo.

Teorema

Esiste un diffeomorfismo armonico tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}^2$ [Collin-Rosenberg, 2007]

- Ciò contraddice la congettura di R. Schoen [Schoen, 1988] che sostiene che non esiste un tale diffeomorfismo.
- Collin e Rosenberg costruiscono un grafico minimo in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ completo, conformemente equivalente a $\mathbb{C}$. Poiché la proiezione di una superficie minima su $\mathbb{H}^2$ è armonica, producono un diffeomorfismo armonico tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}^2$.

1. Tre-varietà omogenee semplicemente connesse
   - Elenco
   - Tipologia di alcuni temi affrontati

2. $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
   - Notazioni ed esempi
   - Superfici minime in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e mappe armoniche
   - Su una congettura di R. Schoen
   - **Superfici con H costante e una fine**
   - Superfici con H costante e con due fini
   - Superfici minime ($H = 0$) con due fini

Fine di una superficie

- Sia M una superficie non compatta di topologia finita. Assumiamo che $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ con $\overline{M}$ compatta.

Fine di una superficie

- Sia M una superficie non compatta di topologia finita. Assumiamo che $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ con $\overline{M}$ compatta.
- Una fine di M è un intorno di uno dei p_j definito a meno di sottoinsiemi compatti di M.

Teorema

Sia $H > \frac{1}{2}$. Non ci sono superfici di curvatura media costante H, con topologia finita ed una fine, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

[..., Rosenberg, 2006], [Espinar, Galvez, Rosenberg, 2009]

Teorema

Sia $H > \frac{1}{2}$. Non ci sono superfici di curvatura media costante H, con topologia finita ed una fine, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

[. . . , Rosenberg, 2006], [Espinar, Galvez, Rosenberg, 2009]

- Per $H \leq \frac{1}{2}$ esistono superfici rotazionali grafico, semplicemente connesse e con una fine, quindi il risultato è sharp.

Teorema

Sia $H > \frac{1}{2}$. Non ci sono superfici di curvatura media costante H, con topologia finita ed una fine, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

[. . . , Rosenberg, 2006], [Espinar, Galvez, Rosenberg, 2009]

- Per $H \leq \frac{1}{2}$ esistono superfici rotazionali grafico, semplicemente connesse e con una fine, quindi il risultato è sharp.

Tappe della dimostrazione

Teorema

Sia $H > \frac{1}{2}$. Non ci sono superfici di curvatura media costante H, con topologia finita ed una fine, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

[..., Rosenberg, 2006], [Espinar, Galvez, Rosenberg, 2009]

- Per $H \leq \frac{1}{2}$ esistono superfici rotazionali grafico, semplicemente connesse e con una fine, quindi il risultato è sharp.

Tappe della dimostrazione

- Si mostra che una tale superficie è contenuta in un cilindro verticale di $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema

Sia $H > \frac{1}{2}$. Non ci sono superfici di curvatura media costante H, con topologia finita ed una fine, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

[..., Rosenberg, 2006], [Espinar, Galvez, Rosenberg, 2009]

- Per $H \leq \frac{1}{2}$ esistono superfici rotazionali grafico, semplicemente connesse e con una fine, quindi il risultato è sharp.

Tappe della dimostrazione

- Si mostra che una tale superficie è contenuta in un cilindro verticale di $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.
- Si usa il metodo di riflessione di Alexandrov per fare vedere che una tale superficie è un grafico verticale di altezza arbitrariamente grande.

Teorema

Sia $H > \frac{1}{2}$. Non ci sono superfici di curvatura media costante H, con topologia finita ed una fine, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

[..., Rosenberg, 2006], [Espinar, Galvez, Rosenberg, 2009]

- Per $H \leq \frac{1}{2}$ esistono superfici rotazionali grafico, semplicemente connesse e con una fine, quindi il risultato è sharp.

Tappe della dimostrazione

- Si mostra che una tale superficie è contenuta in un cilindro verticale di $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.
- Si usa il metodo di riflessione di Alexandrov per fare vedere che una tale superficie è un grafico verticale di altezza arbitrariamente grande.
- Contraddizione con le stime di altezza per le superfici di curvatura media costante $H > \frac{1}{2}$.

Corollario

L'unica superficie semplicemente connessa, di curvatura media costante $H > \frac{1}{2}$, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ è la sfera di rotazione.

Corollario

L'unica superficie semplicemente connessa, di curvatura media costante $H > \frac{1}{2}$, propriamente embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ è la sfera di rotazione.

- Nella prova del Corollario si usa la caratterizzazione delle sfere topologiche di curvatura media costante immerse in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ come sfere di rotazione (Teorema di tipo Hopf) [Abresch, Rosenberg, 2004]

Problema in Nil_3

Esiste una superficie di curvatura media costante, topologia finita ed una fine, propriamente embedded in Nil_3?

$H \neq 0$

- Esistono superfici rotazionali con H costante e due fini

  [Hsiang, Hsiang, 1989], [Pedrosa, Ritoré, 1999], [Sa Earp, Toubiana, 2005]

$H \neq 0$

- Esistono superfici rotazionali con H costante e due fini
  [Hsiang, Hsiang, 1989], [Pedrosa, Ritoré, 1999], [Sa Earp, Toubiana, 2005]
- Esistono superfici con $H = \frac{1}{2}$, non rotazionali e con due fini asintotiche alle fini delle rotazionali [Cartier, Hauswirth, 2012]

1. Tre-varietà omogenee semplicemente connesse
   - Elenco
   - Tipologia di alcuni temi affrontati

2. $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
   - Notazioni ed esempi
   - Superfici minime in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e mappe armoniche
   - Su una congettura di R. Schoen
   - Superfici con H costante e una fine
   - Superfici con H costante e con due fini
   - Superfici minime ($H = 0$) con due fini

Teorema 1

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con due fini di tipo anulare, ognuna grafico verticale con bordo asintotico $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ è una catenoide

[$\cdots$, Sa Earp, Toubiana 2012]

Teorema 1

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con due fini di tipo anulare, ognuna grafico verticale con bordo asintotico $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ è una catenoide

[$\cdots$, Sa Earp, Toubiana 2012]

Theorem 2

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura totale finita e due fini, ciascuna asintotica ad un piano geodetico verticale, è una superficie modello [Hauswirth, $\cdots$, Sa Earp, Toubiana, 2012] ▸ Superficie Modello

Teorema 1

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con due fini di tipo anulare, ognuna grafico verticale con bordo asintotico $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ è una catenoide

[$\cdots$, Sa Earp, Toubiana 2012]

- Proviamo ed usiamo il fatto che la superficie è un grafico orizzontale all'infinito. ▸ Grafico orizzontale

Theorem 2

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura totale finita e due fini, ciascuna asintotica ad un piano geodetico verticale, è una superficie modello [Hauswirth, $\cdots$, Sa Earp, Toubiana, 2012] ▸ Superficie Modello

- Si usa fortemente la struttura conforme.

Theorem 2

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura totale finita e due fini, ciascuna asintotica ad un piano geodetico verticale, è una superficie modello [Hauswirth, ···, Sa Earp, Toubiana, 2012] ▸ Superficie Modello

- Si usa fortemente la struttura conforme.
- Una fine di curvatura totale finita è parabolica [Huber, 1957], ovvero si può parametrizzare conformemente con $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$

Theorem 2

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura totale finita e due fini, ciascuna asintotica ad un piano geodetico verticale, è una superficie modello [Hauswirth, $\cdots$, Sa Earp, Toubiana, 2012]

Tappe

- Studio della forma delle fini di una superficie minima con curvatura totale finita [Han-Tam-Treibergs-Wan, 1995], [Hauswirth, 2006], [Hauswirth-Rosenberg, 2006], [Hauswirth-Sa Earp-Toubiana, 2008]

Theorem 2

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura totale finita e due fini, ciascuna asintotica ad un piano geodetico verticale, è una superficie modello [Hauswirth, ···, Sa Earp, Toubiana, 2012]

Tappe

- Studio della forma delle fini di una superficie minima con curvatura totale finita [Han-Tam-Treibergs-Wan, 1995], [Hauswirth, 2006], [Hauswirth-Rosenberg, 2006], [Hauswirth-Sa Earp-Toubiana, 2008]
- Studio della forma delle curve ottenute intersecando la superficie con le fette, vicino al piano asintotico [Hauswirth, 2006], [Hauswirth-Rosenberg, 2006], [Hauswirth-Sa Earp-Toubiana, 2008], [Minsky, 1992]

Theorem 2

Una superficie minima completa in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura totale finita e due fini, ciascuna asintotica ad un piano geodetico verticale, è una superficie modello [Hauswirth, $\cdots$, Sa Earp, Toubiana, 2012]

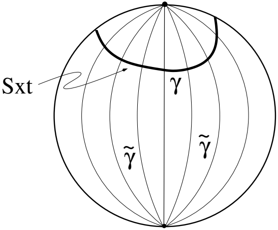
Tappe

- Studio della forma delle fini di una superficie minima con curvatura totale finita [Han-Tam-Treibergs-Wan, 1995], [Hauswirth, 2006], [Hauswirth-Rosenberg, 2006], [Hauswirth-Sa Earp-Toubiana, 2008]
- Studio della forma delle curve ottenute intersecando la superficie con le fette, vicino al piano asintotico [Hauswirth, 2006], [Hauswirth-Rosenberg, 2006], [Hauswirth-Sa Earp-Toubiana, 2008], [Minsky, 1992]
- Applicare il metodo di riflessione di Alexandrov con piani geodetici verticali e orizzontali [Alexandrov, 1962]

KEY NOTION

Definition

Let $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ be a geodesic. We say that the surface $S \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is a *horizontal graph with respect to* γ if, for any equidistant curve $\tilde{\gamma}$ of γ and for any $t \in \mathbb{R}$, the curve $\tilde{\gamma} \times \{t\}$ intersects S at most in one point.



Back to Theorems