Calcolo funzionale di laplaciani e sublaplaciani su gruppi di Lie e spazi omogenei

Fulvio Ricci

Scuola Normale Superiore di Pisa

Pisa, 1 marzo 2013

Calcolo funzionale di operatori autoaggiunti

In generale, dato un operatore lineare autoaggiunto *L* su uno spazio di Hilbert, la teoria spettrale consente di definire altri operatori $m(L)$ che sono “funzioni” dell’operatore dato.

Il simbolo *m* indica una generica funzione boreliana su $\mathbb{R}$ (per operatori positivi, su $\mathbb{R}_+$), detta *moltiplicatore spettrale*.

Laplaciani e sublaplaciani

Il calcolo funzionale si applica in particolare a operatori differenziali (ipo)ellittici, come:

- operatori di Laplace-Beltrami Δ_0 su varietà riemanniane;
- più in generale, Laplaciani di Hodge Δ_k agenti su k-forme;
- laplaciani di Kohn* $\Box = (\bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b^*)^2$ su varietà CR;
- su varietà generali, somme di quadrati di Hörmander (*sublaplaciani*),

$$L = \sum_{j=1}^{k} X_j^* X_j \ ,$$

  dove $X_1, \ldots, X_k$ sono campi vettoriali C^∞ e $\mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_k)$ copre lo spazio tangente in ogni punto.

*sotto opportune condizioni

Laplaciani e sublaplaciani

Il calcolo funzionale si applica in particolare a operatori differenziali (ipo)ellittici, come:

- operatori di Laplace-Beltrami Δ_0 su varietà riemanniane;
- più in generale, Laplaciani di Hodge Δ_k agenti su k-forme;
- laplaciani di Kohn* $\Box = (\bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b^*)^2$ su varietà CR;
- su varietà generali, somme di quadrati di Hörmander (*sublaplaciani*),

$$L = \sum_{j=1}^{k} X_j^* X_j \ ,$$

  dove $X_1, \ldots, X_k$ sono campi vettoriali C^∞ e $\mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_k)$ copre lo spazio tangente in ogni punto.

*sotto opportune condizioni

Laplaciani e sublaplaciani

Il calcolo funzionale si applica in particolare a operatori differenziali (ipo)ellittici, come:

- operatori di Laplace-Beltrami Δ_0 su varietà riemanniane;
- più in generale, Laplaciani di Hodge Δ_k agenti su k-forme;
- laplaciani di Kohn* $\Box = (\bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b^*)^2$ su varietà CR;
- su varietà generali, somme di quadrati di Hörmander (*sublaplaciani*),

$$L = \sum_{j=1}^{k} X_j^* X_j \; ,$$

dove $X_1, \dots, X_k$ sono campi vettoriali C^∞ e $\mathrm{Lie}(X_1, \dots, X_k)$ copre lo spazio tangente in ogni punto.

*sotto opportune condizioni

Laplaciani e sublaplaciani

Il calcolo funzionale si applica in particolare a operatori differenziali (ipo)ellittici, come:

- operatori di Laplace-Beltrami Δ_0 su varietà riemanniane;
- più in generale, Laplaciani di Hodge Δ_k agenti su k-forme;
- laplaciani di Kohn* $\Box = (\bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b^*)^2$ su varietà CR;
- su varietà generali, somme di quadrati di Hörmander (*sublaplaciani*),

  $$L = \sum_{j=1}^{k} X_j^* X_j \ ,$$

  dove $X_1, \dots, X_k$ sono campi vettoriali C^∞ e $\mathrm{Lie}(X_1, \dots, X_k)$ copre lo spazio tangente in ogni punto.

---

*sotto opportune condizioni

Problemi

In generale,

$$m(L)f(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\ .$$

Problema generale: stabilire relazioni tra

• proprietà del moltiplicatore m (regolarità e condizioni sulle sue derivate),

• proprietà dell'operatore $m(L)$ (limitatezza su spazi diversi da L^2).

• proprietà del nucleo K (supporto compatto, regolarità, singolarità di tipo "valore principale"),

Problemi

In generale,

$$m(L)f(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\ .$$

Problema generale: stabilire relazioni tra

• proprietà del moltiplicatore m (regolarità e condizioni sulle sue derivate),

• proprietà dell'operatore $m(L)$ (limitatezza su spazi diversi da L^2).

• proprietà del nucleo K (supporto compatto, regolarità, singolarità di tipo "valore principale"),

Problemi

In generale,

$$m(L)f(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\ .$$

Problema generale: stabilire relazioni tra

• proprietà del moltiplicatore m (regolarità e condizioni sulle sue derivate),

• proprietà dell'operatore $m(L)$ (limitatezza su spazi diversi da L^2).

• proprietà del nucleo K (supporto compatto, regolarità, singolarità di tipo "valore principale"),

Invarianza per l'azione di un gruppo di Lie

Operatori invarianti rispetto all'azione di un gruppo di Lie G, tipicamente su G stesso o su un suo quoziente G/K.

Si possono utilizzare metodi di analisi armonica per ottenere la decomposizione spettrale dell'operatore dato.

Esempi:

- operatori di Laplace-Beltrami su spazi simmetrici
- sublaplaciani invarianti a sinistra su gruppi nilpotenti stratificati (detti anche *gruppi di Carnot*)

Invarianza per l'azione di un gruppo di Lie

Operatori invarianti rispetto all'azione di un gruppo di Lie G, tipicamente su G stesso o su un suo quoziente G/K.

Si possono utilizzare metodi di analisi armonica per ottenere la decomposizione spettrale dell'operatore dato.

Esempi:

- operatori di Laplace-Beltrami su spazi simmetrici
- sublaplaciani invarianti a sinistra su gruppi nilpotenti stratificati (detti anche *gruppi di Carnot*)

Invarianza per l'azione di un gruppo di Lie

Operatori invarianti rispetto all'azione di un gruppo di Lie G, tipicamente su G stesso o su un suo quoziente G/K.

Si possono utilizzare metodi di analisi armonica per ottenere la decomposizione spettrale dell'operatore dato.

Esempi:

- operatori di Laplace-Beltrami su spazi simmetrici
- sublaplaciani invarianti a sinistra su gruppi nilpotenti stratificati (detti anche *gruppi di Carnot*)

Invarianza per l’azione di un gruppo di Lie

Operatori invarianti rispetto all’azione di un gruppo di Lie G, tipicamente su G stesso o su un suo quoziente G/K.

Si possono utilizzare metodi di analisi armonica per ottenere la decomposizione spettrale dell’operatore dato.

Esempi:

- operatori di Laplace-Beltrami su spazi simmetrici
- sublaplaciani invarianti a sinistra su gruppi nilpotenti stratificati (detti anche *gruppi di Carnot*)

Calcolo funzionale congiunto

Se $L_1, \ldots, L_k$ sono operatori autoaggiunti su uno stesso spazio che commutano tra loro, si possono definire operatori $m(L_1, \ldots, L_k)$.

Lo studio della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$ coincide in larga parte con lo studio del calcolo funzionale congiunto delle derivate parziali $L_j = i\partial_{x_j}$:

$$m(i\partial_{x_1}, \ldots, i\partial_{x_n})f = \widehat{m} * f \; .$$

Calcolo funzionale congiunto

Se $L_1, \ldots, L_k$ sono operatori autoaggiunti su uno stesso spazio che commutano tra loro, si possono definire operatori $m(L_1, \ldots, L_k)$.

Lo studio della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$ coincide in larga parte con lo studio del calcolo funzionale congiunto delle derivate parziali $L_j = i\partial_{x_j}$:

$$m(i\partial_{x_1}, \ldots, i\partial_{x_n})f = \widehat{m} * f \ .$$

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg H_n $(\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
    - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
    - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
    - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
    - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
    - Metriche: riemanniana $\cong |z-w|$;

      subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
    - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg $H_n \ (\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z-w|$;
    subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg H_n $(\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z-w|$; subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg $H_n \;\; (\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z - w|$;
    subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg H_n $(\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z - w|$;
    subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg H_n $(\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z-w|$;
    subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg H_n $(\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z-w|$;
    subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coesistenza di metriche diverse

- Gruppo di Heisenberg H_n $(\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$
  - Metrica subriemanniana $d_s\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^4 + t^2\big)^{1/4}$
  - Metrica riemanniana $d_r\big((z,t),(0,0)\big) \cong \big(|z|^2 + t^2\big)^{1/2}$ localmente, asintoticamente $\cong d_s\big((z,t),(0,0)\big)$ all'infinito
  - Sublaplaciano (subriem.), Laplace-Beltrami
- Sfera S^{2n-1} in $\mathbb{C}^n$
  - Distribuzione orizzontale: $(T^{1,0} \oplus T^{0,1})(S^{2n-1})$
  - Metriche: riemanniana $\cong |z-w|$;
    subriemanniana $\cong \big|1 - \langle z, w\rangle\big|^{\frac{1}{2}}$
  - Operatori: Laplace-Beltrami e sublaplaciano

Coppie di Gelfand / Spazi commutativi

Siano G un gruppo di Lie e K un suo sottogruppo compatto.

Si dice che (G, K) è una coppia di Gelfand, o che $M = G/K$ è uno spazio commutativo, se l'algebra $\mathbb{D}(M)^G$ degli operatori differenziali G-invarianti su M è commutativa.

J. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces*,
Math. Surveys AMS, 2007

Ci sono due classi rilevanti di coppie di Gelfand:

- *coppie riduttive*, in cui G è riduttivo
  ($\longleftrightarrow$ spazi debolmente simmetrici riduttivi)

- *coppie nilpotenti*, in cui $G = K \ltimes N$, con N nilpotente

Coppie di Gelfand / Spazi commutativi

Siano G un gruppo di Lie e K un suo sottogruppo compatto.

Si dice che (G, K) è una coppia di Gelfand, o che $M = G/K$ è uno spazio commutativo, se l'algebra $\mathbb{D}(M)^G$ degli operatori differenziali G-invarianti su M è commutativa.

J. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces*,
Math. Surveys AMS, 2007

Ci sono due classi rilevanti di coppie di Gelfand:

- *coppie riduttive*, in cui G è riduttivo
  ($\longleftrightarrow$ spazi debolmente simmetrici riduttivi)

- *coppie nilpotenti*, in cui $G = K \ltimes N$, con N nilpotente

Coppie di Gelfand / Spazi commutativi

Siano G un gruppo di Lie e K un suo sottogruppo compatto.

Si dice che (G, K) è una coppia di Gelfand, o che $M = G/K$ è uno spazio commutativo, se l'algebra $\mathbb{D}(M)^G$ degli operatori differenziali G-invarianti su M è commutativa.

J. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces*,
Math. Surveys AMS, 2007

Ci sono due classi rilevanti di coppie di Gelfand:

- *coppie riduttive*, in cui G è riduttivo
  ($\longleftrightarrow$ spazi debolmente simmetrici riduttivi)
- *coppie nilpotenti*, in cui $G = K \ltimes N$, con N nilpotente

Coppie di Gelfand / Spazi commutativi

Siano G un gruppo di Lie e K un suo sottogruppo compatto.

Si dice che (G, K) è una coppia di Gelfand, o che $M = G/K$ è uno spazio commutativo, se l'algebra $\mathbb{D}(M)^G$ degli operatori differenziali G-invarianti su M è commutativa.

J. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces*,
Math. Surveys AMS, 2007

Ci sono due classi rilevanti di coppie di Gelfand:

- *coppie riduttive*, in cui G è riduttivo
  ($\longleftrightarrow$ spazi debolmente simmetrici riduttivi)

- *coppie nilpotenti*, in cui $G = K \ltimes N$, con N nilpotente

Struttura delle coppie di Gelfand

Teorema di Vinberg

Se G è connesso e (G, K) è una coppia di Gelfand, allora $G = L \ltimes N$, con $L \supseteq K$ riduttivo e N nilpotente di passo ≤ 2.
Inoltre

- *le azioni di L e K su N danno le stesse orbite,*
- *(L, K) e $(K \ltimes N, K)$ sono coppie di Gelfand.*

O. Yakimova: caratterizzazione delle coppie di Gelfand con G connesso e loro classificazione

Struttura delle coppie di Gelfand

Teorema di Vinberg

Se G è connesso e (G, K) è una coppia di Gelfand, allora $G = L \ltimes N$, con $L \supseteq K$ riduttivo e N nilpotente di passo ≤ 2.
Inoltre

- *le azioni di L e K su N danno le stesse orbite,*
- *(L, K) e $(K \ltimes N, K)$ sono coppie di Gelfand.*

O. Yakimova: caratterizzazione delle coppie di Gelfand con G connesso e loro classificazione

Operatori lineari G-invarianti su $M = G/K$

Siano $L_1, \ldots, L_k$ generatori autoaggiunti di $\mathbb{D}(M)^K$.

Gli operatori $T_m = m(L_1, \ldots, L_k)$, con m limitata, sono tutti e soli gli operatori G-invarianti limitati su $L^2(M)$.

Essi hanno la forma

$$T_m f(x) = \int_G \Phi_m(g) f(g^{-1} \cdot x)\, dg$$

dove Φ è una funzione (o distribuzione) bi-K-invariante su G.

$$T_{mm'} = T_m T_{m'} \ , \qquad \Phi_{mm'} = \Phi_m * \Phi_{m'} \ .$$

Operatori lineari G-invarianti su $M = G/K$

Siano $L_1, \dots, L_k$ generatori autoaggiunti di $\mathbb{D}(M)^K$.

Gli operatori $T_m = m(L_1, \dots, L_k)$, con m limitata, sono tutti e soli gli operatori G-invarianti limitati su $L^2(M)$.

Essi hanno la forma

$$T_m f(x) = \int_G \Phi_m(g) f(g^{-1} \cdot x)\, dg$$

dove Φ è una funzione (o distribuzione) bi-K-invariante su G.

$$T_{mm'} = T_m T_{m'}\ , \qquad \Phi_{mm'} = \Phi_m * \Phi_{m'}\ .$$

Operatori lineari G-invarianti su $M = G/K$

Siano $L_1, \ldots, L_k$ generatori autoaggiunti di $\mathbb{D}(M)^K$.

Gli operatori $T_m = m(L_1, \ldots, L_k)$, con m limitata, sono tutti e soli gli operatori G-invarianti limitati su $L^2(M)$.

Essi hanno la forma

$$T_m f(x) = \int_G \Phi_m(g) f(g^{-1} \cdot x)\, dg$$

dove Φ è una funzione (o distribuzione) bi-K-invariante su G.

$$T_{mm'} = T_m T_{m'} \ , \qquad \Phi_{mm'} = \Phi_m * \Phi_{m'} \ .$$

Trasformata sferica

Lo strumento per studiare tali operatori è la *trasformata sferica*, che generalizza la nozione di trasformata di Fourier.

Essa si applica a funzioni F bi-K-invarianti su G:

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_G F(g)\lambda(g^{-1}\cdot x)\, dg\,,$$

dove λ è definita su $M = G/K$, K-invariante, limitata, $\lambda(eK) = 1$, e autofunzione di tutti gli operatori in $\mathbb{D}(M)^K$
(*funzione sferica limitata*).

Il dominio di $\widehat{F}$ è lo spettro di Gelfand:

$$\begin{aligned}\Sigma(G,K) &= \{\textit{funzioni sferiche limitate}\}\\ &\cong \Sigma' = \big\{\big(\mu_1(\lambda), \dots, \mu_k(\lambda)\big) : \lambda \in \Sigma\big\} \subset \mathbb{C}^k\,.\end{aligned}$$

Σ' contiene con lo spettro L^2 congiunto σ di $L_1, \dots, L_k$ e $\widehat{(\Phi_m)}|_\sigma = m$

Trasformata sferica

Lo strumento per studiare tali operatori è la *trasformata sferica*, che generalizza la nozione di trasformata di Fourier.

Essa si applica a funzioni F bi-K-invarianti su G:

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_G F(g)\lambda(g^{-1} \cdot x)\, dg \ ,$$

dove λ è definita su $M = G/K$, K-invariante, limitata, $\lambda(eK) = 1$, e autofunzione di tutti gli operatori in $\mathbb{D}(M)^K$
(*funzione sferica limitata*).

Il dominio di $\widehat{F}$ è lo spettro di Gelfand:

$$\begin{aligned} \Sigma(G, K) &= \{\textit{funzioni sferiche limitate}\} \\ &\cong \Sigma' = \left\{ \left(\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_k(\lambda)\right) : \lambda \in \Sigma \right\} \subset \mathbb{C}^k \ . \end{aligned}$$

Σ' contiene con lo spettro L^2 congiunto σ di $L_1, \ldots, L_k$ e $\widehat{(\Phi_m)}| = m$

Trasformata sferica

Lo strumento per studiare tali operatori è la *trasformata sferica*, che generalizza la nozione di trasformata di Fourier.

Essa si applica a funzioni F bi-K-invarianti su G:

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_G F(g)\lambda(g^{-1}\cdot x)\, dg \,,$$

dove λ è definita su $M = G/K$, K-invariante, limitata, $\lambda(eK) = 1$, e autofunzione di tutti gli operatori in $\mathbb{D}(M)^K$
(*funzione sferica limitata*).

Il dominio di $\widehat{F}$ è lo spettro di Gelfand:

$$\begin{aligned}\Sigma(G,K) &= \{\textit{funzioni sferiche limitate}\}\\ &\cong \Sigma' = \big\{\big(\mu_1(\lambda),\dots,\mu_k(\lambda)\big) : \lambda\in\Sigma\big\} \subset \mathbb{C}^k \,.\end{aligned}$$

Σ' contiene con lo spettro L^2 congiunto σ di $L_1,\dots,L_k$ e $(\widehat{\Phi_m})|_{\sigma} = m$

Trasformata sferica

Lo strumento per studiare tali operatori è la *trasformata sferica*, che generalizza la nozione di trasformata di Fourier.

Essa si applica a funzioni F bi-K-invarianti su G:

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_G F(g)\lambda(g^{-1} \cdot x)\, dg \ ,$$

dove λ è definita su $M = G/K$, K-invariante, limitata, $\lambda(eK) = 1$, e autofunzione di tutti gli operatori in $\mathbb{D}(M)^K$
(*funzione sferica limitata*).

Il dominio di $\widehat{F}$ è lo spettro di Gelfand:

$$\begin{aligned} \Sigma(G, K) &= \{\textit{funzioni sferiche limitate}\} \\ &\cong \Sigma' = \left\{ \left(\mu_1(\lambda), \dots, \mu_k(\lambda)\right) : \lambda \in \Sigma \right\} \subset \mathbb{C}^k \ . \end{aligned}$$

Σ' contiene con lo spettro L^2 congiunto σ di $L_1, \dots, L_k$ e $(\widehat{\Phi_m})_{|_\sigma} = m$

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di "funzioni di Schwartz" e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n/U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di "funzioni di Schwartz" e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n/U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di "funzioni di Schwartz" e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n / U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di "funzioni di Schwartz" e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n/U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di "funzioni di Schwartz" e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n / U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di "funzioni di Schwartz" e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n / U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand riduttive

L'analisi sferica è stata ampiamente studiata nel caso degli spazi simmetrici. Nel caso non compatto, più interessante, si hanno:

- teoremi di Paley-Wiener (Helgason, Gangolli)
- nozioni di “funzioni di Schwartz” e loro trasformate (Harish-Chandra, Helgason, Trombi-Varadarajan)
- condizioni per la limitatezza L^p di moltiplicatori spettrali (Clerc-Stein, Anker, Giulini-Mauceri-Meda, Ionescu, Meda-Vallarino)

Esempio non simmetrico: $S^{2n-1} \cong U_n/U_{n-1}$:

- proprietà dei proiettori spettrali congiunti (Casarino)
- moltiplicatori spettrali del sublaplaciano (Cowling-Klima-Sikora).

Coppie di Gelfand nilpotenti

Le coppie di Gelfand nilpotenti sono le coppie in cui $G = K \ltimes N$ con N nilpotente.

- Corrispondenza (sotto opportune ipotesi) tra moltiplicatori di Schwartz e nuclei di Schwartz
  (Astengo-Di Blasio-R., Fischer-R.-Yakimova)

Nel caso $N = H_n$, $K = U_n$:

- Condizioni di Mihlin-Hörmander (o Marcinkiewicz) su m e limitatezza di $m(L, i\partial_t)$ su L^p, $1 < p < \infty$
  (Mauceri, Müller-R.-Stein, Veneruso, Martini).

- Teoremi di Paley-Wiener (Astengo-Di Blasio-R.).

Coppie di Gelfand nilpotenti

Le coppie di Gelfand nilpotenti sono le coppie in cui $G = K \ltimes N$ con N nilpotente.

- Corrispondenza (sotto opportune ipotesi) tra moltiplicatori di Schwartz e nuclei di Schwartz
  (Astengo-Di Blasio-R., Fischer-R.-Yakimova)

Nel caso $N = H_n$, $K = U_n$:

- Condizioni di Mihlin-Hörmander (o Marcinkiewicz) su m e limitatezza di $m(L, i\partial_t)$ su L^p, $1 < p < \infty$
  (Mauceri, Müller-R.-Stein, Veneruso, Martini).
- Teoremi di Paley-Wiener (Astengo-Di Blasio-R.).

Coppie di Gelfand nilpotenti

Le coppie di Gelfand nilpotenti sono le coppie in cui $G = K \ltimes N$ con N nilpotente.

- Corrispondenza (sotto opportune ipotesi) tra moltiplicatori di Schwartz e nuclei di Schwartz (Astengo-Di Blasio-R., Fischer-R.-Yakimova)

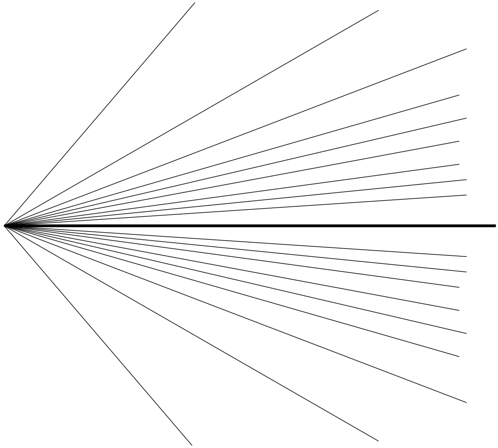
  Nel caso $N = H_n$, $K = U_n$:
- Condizioni di Mihlin-Hörmander (o Marcinkiewicz) su m e limitatezza di $m(L, i\partial_t)$ su L^p, $1 < p < \infty$ (Mauceri, Müller-R.-Stein, Veneruso, Martini).
- Teoremi di Paley-Wiener (Astengo-Di Blasio-R.).

Coppie di Gelfand nilpotenti

Le coppie di Gelfand nilpotenti sono le coppie in cui $G = K \ltimes N$ con N nilpotente.

- Corrispondenza (sotto opportune ipotesi) tra moltiplicatori di Schwartz e nuclei di Schwartz
  (Astengo-Di Blasio-R., Fischer-R.-Yakimova)

  Nel caso $N = H_n$, $K = U_n$:
- Condizioni di Mihlin-Hörmander (o Marcinkiewicz) su m e limitatezza di $m(L, i\partial_t)$ su L^p, $1 < p < \infty$
  (Mauceri, Müller-R.-Stein, Veneruso, Martini).
- Teoremi di Paley-Wiener (Astengo-Di Blasio-R.).



Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

Teorema (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

<u>Teorema</u> (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

Teorema (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

Teorema (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

<u>Teorema</u> (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

<u>Teorema</u> (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

Teorema (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

<u>Teorema</u> (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Laplaciano di Hodge su gruppi di Heisenberg

Teorema (Müller-Peloso-R., GAFA 2007, Memoirs AMS 2013?)

Sia $1 \leq k \leq 2n$.

(i) Esistono V_j, W_j, U_j, D_j, dove

- $L^2 \otimes \Lambda^k(H_n) = \sum_j^{\oplus} V_j$,
- ogni V_j è Δ_k-invariante,
- W_j è uno spazio di forme orizzontali,
- $U_j : V_j \longrightarrow W_j$ è unitario,
- $D_j = U_j \Delta_k U_j^{-1}$ è un operatore (pseudo)-differenziale scalare su W_j,
- $D_j = m_j(L, i\partial_t)$.

(ii) La stessa decomposizione si ha in $L^p \otimes \Lambda^k$ per $1 < p < \infty$.

(iii) $d\Delta_k^{-\frac{1}{2}}$ è limitato da $L^p \otimes \Lambda^k$ a $L^p \otimes \Lambda^{k+1}$, per $1 < p < \infty$.

Applicazioni

Corollario

Per $1 < p < \infty$,

$$L^p \otimes \Lambda^k = \overline{d(C_c^\infty \otimes \Lambda^k)} \oplus \overline{d^*(C_c^\infty \otimes \Lambda^k)}$$

Corollario

Sotto le stesse ipotesi di Mihlin-Hörmander sul moltiplicatore m valide per L e Δ_0, $m(\Delta_k)$ è limitato su $L^p \otimes \Lambda^k$, con $1 < p < \infty$.

Applicazioni

<u>Corollario</u>

Per $1 < p < \infty$,

$$L^p \otimes \Lambda^k = \overline{d(C_c^\infty \otimes \Lambda^k)} \oplus \overline{d^*(C_c^\infty \otimes \Lambda^k)}$$

<u>Corollario</u>

Sotto le stesse ipotesi di Mihlin-Hörmander sul moltiplicatore m valide per L e Δ_0, $m(\Delta_k)$ è limitato su $L^p \otimes \Lambda^k$, con $1 < p < \infty$.