METRICHE BILANCIATE E APPLICAZIONI

Andrea Loi (Università di Cagliari)

VARIETÀ REALI E COMPLESSE:
GEOMETRIA, TOPOLOGIA E ANALISI ARMONICA

Pisa, Scuola Normale Superiore
28 febbraio - 3 marzo 2013

Collaborazioni: Claudio Arezzo, Roberto Mossa, Daria Uccheddu, Michela Zedda e Fabio Zuddas.

Definizioni principali

Una *varietà polarizzata* (M, L) consiste di una varietà compatta e complessa M e di un fibrato olomorfo molto ampio $L \to M$.

Sia (M, L) una varietà polarizzata. Una metrica di Kähler g su M tale che $\omega_g \in c_1(L)$ si dice *polarizzata* da L.

Sia g una metrica di Kähler su M polarizzata da L. Allora esiste un prodotto hermitiano h su L tale che $\mathrm{Ric}(h) = \omega_g$. *

Una *quantizzazione geometrica* di una varietà di Kähler (M, ω_g) è un fibrato hermitiano positivo (L, h) su M tale che $\mathrm{Ric}(h) = \omega_g$.

*Se $\sigma : U \to L$ è una banalizzazione locale $\mathrm{Ric}(h)_{|U} = -\frac{i}{2}\partial\bar{\partial} \log h(\sigma(x), \sigma(x))$

La funzione di Kempf

Sia (M, L) una varietà polarizzata, g una metrica su M polarizzata da L e h una metrica herm. su L tale che $\mathrm{Ric}(h) = \omega_g$.

<u>*Funzione distorsione di Kempf*</u> $T_g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$

$$T_g(x) = \sum_{j=0}^{N} h(s_j(x), s_j(x)),\ x \in M$$

dove $\{s_0, \ldots, s_N\}$, $N + 1 = \dim H^0(L)$, è una b.o. rispetto a:

$$\langle s, t \rangle_h = \int_M h(s, t) \frac{\omega_g^n}{n!},\ s, t \in H^0(L)$$

Definizione di metrica bilanciata

Definizione (Donaldson. JDG 2001): Sia (M, L) una varietà polarizzata. Una metrica g su M polarizzata da L è <u>*bilanciata*</u> se

$$T_g = const = \frac{N+1}{V(M)}, \quad V(M) = \int_M \frac{\omega_g^n}{n!}.$$

Risultati noti sulle metriche bilanciate

Teorema (G. Zhang, Comp. Math. '96): Sia (M, L) una varietà polarizzata. Allora esiste una metrica bilanciata g su M polarizzata da $L \Leftrightarrow (M, L)$ Chow polistabile.

Teorema (S. Donaldson, JDG 2001): *Sia (M, L) una varietà polarizzata. Sia g_{cscK} una metrica di Kähler a curvatura scalare costante polarizzata da L. Assumiamo che $\frac{\mathrm{Aut}(M,L)}{\mathbb{C}^*}$ sia discreto. Allora, per tutti gli $m >> 1$, esiste un'unica metrica bilanciata g_m polarizzata da L^m e $\frac{g_m}{m} \xrightarrow{C^\infty} g_{cscK}$. Viceversa, se g_m è una successione di metriche bilanciate polarizzate da L^m tali che $\frac{g_m}{m} \xrightarrow{C^\infty} g_\infty$ allora g_∞ è cscK.*

Corollario: *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata,* g_{cscK} *metrica polarizzata da* L *e* $\frac{\mathit{Aut}(M,L)}{\mathbb{C}^*}$ *discreto. Allora* (M, L) *è asintoticamente Chow polistabile.*

Corollario: *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata,* g_{cscK} *metrica polarizzata da* L *e* $\frac{\mathit{Aut}(M,L)}{\mathbb{C}^*}$ *discreto. Allora* g_{cscK} *(se esiste) è unica in* $c_1(L)$*.*

Cosa succede senza l'ipotesi su **Aut**(M, L)

Teorema (C. Arezzo – L. , Comm. Math. Phys. 2004): *Siano* g *e* $\tilde{g}$ *due metriche bilanciate in* $c_1(L)$. *Allora esiste* $F \in$ *Aut*(M, L) *tale che* $F^*\tilde{g} = g$.

Teorema (A. Della Vedova – F. Zuddas, Trans. AMS 2011): *Sia* $M = Bl_{p_1,\dots,p_4}\mathbb{C}P^2$ *(in quattro punti allineati tranne uno). Allora esiste una polarizzazione* L *di* M *e* $g_{cscK} \in c_1(L)$ *tale che* (M, L^m) *non è Chow polistabile per* $m >> 1$.

Teorema (Chen –Tian, 2008): Se $\tilde{g}_{cscK} \sim g_{cscK} \Rightarrow \exists\, F \in \mathrm{Aut}(M)$ t.c. $F^*\tilde{g}_{cscK} = g_{cscK}$.

Qualche problema sulle metriche bilanciate

Sia (M, L) una varietà polarizzata.

$\mathcal{B}(L) = \{$metriche bilanciate su M polarizzate da L^m, $m = 1, \ldots\}$

$\mathcal{B}_c(L) = \mathcal{B}(L)/\sim$

dove $g_B, \tilde{g}_B \in \mathcal{B}(L)$, $g_B \sim \tilde{g}_B \Leftrightarrow [\omega_{g_B}] = [\omega_{\tilde{g}_B}] \Leftrightarrow F^*\tilde{g}_B = g_B$

$\mathcal{B}_{g_B} = \{m g_B \in \mathcal{B}(L) \mid m \in \mathbb{N}\}, \quad g_B \in \mathcal{B}(L)$

Problema: studiare $\#\mathcal{B}_c(L)$ e $\#\mathcal{B}_{g_B}$.

$$\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty \quad \overset{?}{\Longleftarrow}\!\!\Longrightarrow \#\mathcal{B}_c(L) = \infty \quad \Longleftarrow (M, L) \text{ asint.Chow pol.}$$

Metriche bilanciate e quantizzazioni regolari

M, Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley, Trans. AMS '83:

Sia (M, L) una varietà polarizzata e g una metrica di Kähler su M polarizzata da L. Allora (L, h) è detta una quantizzazione regolare di $(M, \omega_g = \mathrm{Ric}(h))$ se mg è bilanciata $\forall m$.

$$\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty \ \Leftarrow \ (M, \omega_{g_B}) \ \text{ quant. reg } \ \Rightarrow (M, L) \ \text{ asint. Chow pol.}$$

$$\Uparrow$$

$$(M, g_{hom}),\ \pi_1(M) = 1,\ \omega_{g_{hom}} \text{ intera}$$

Una congettura e due teoremi sulle metriche bilanciate

Congettura: *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata Se esiste* $g_B \in \mathcal{B}(L)$ *tale che* $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ *allora* (M, g_B) *è omogenea e* $\pi_1(M) = 1$.

Teorema 1 (C. Arezzo, L. , F. Zuddas, Ann. Glob. Anal. Geom. 2011): *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata. Supponiamo che* $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$. *Se esiste* $g_B \in \mathcal{B}(L)$ *tale che* $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ *allora* $M = \mathbb{C}P^1$.

Teorema 2 (C. Arezzo, L. , F. Zuddas, Ann. Glob. Anal. Geom. 2011): *Sia* M *una varietà torica,* $\dim M \leq 4$. *Sia* g_{KE} *una metrica di KE polarizzata da* $L = K^*$. *Allora* $\#\mathcal{B}_c(L) = \infty$. *Inoltre esiste* $g_B \in \mathcal{B}(L)$ *tale che* $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ *se e solo se* M *è il proiettivo o il prodotto di proiettivi.*

Metriche bilanciate e proiettivamente indotte

(M, L) varietà polarizzata, g metrica polarizzata da L, $m \in \mathbb{N}^+$, h_m metrica hermitiana su L^m tale che $\mathrm{Ric}(h_m) = m\omega_g$.

Sia $\{s_0, \ldots, s_{d_m}\}$, $d_m + 1 = \dim H^0(L^m)$, una b.o. rispetto a

$$\langle s, t\rangle_{h_m} = \int_M h_m(s, t)\frac{\omega_g^n}{n!}, s, t \in H^0(L^m),$$

$\varphi_m : M \to \mathbb{C}P^{d_m} : x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_{d_m}(x)]$ *coherent states map*

$$\boxed{\varphi_m^*\omega_{FS} = m\omega_g + \tfrac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log T_{mg}(x)}$$

$T_{mg}(x) = \sum_{j=0}^{d_m} h_m(s_j(x), s_j(x))$.

<u>Quindi:</u> mg è bilanciata $\Leftrightarrow$ mg è proiettivamente indotta tramite φ_m.

Due risultati sulle metriche proiettivamente indotte

1. *Esiste una sottovarietà di KE non omogenea e completa di* $\mathbb{C}P^{\infty}$ *(L., M. Zedda, Math. Ann. 2011)*

Congettura: *Una sottovarietà di KE di* $\mathbb{C}P^{N}$ *è omogenea.*

2. *Classificazione delle varietà omogenee proiettivamente indotte (A. J. Di Scala, L., H. Hishi, Asian J. Math. 2012)*

Espansione asintotica di TYZ

Teorema (S. Zelditch, Int. Math. Res. Not. '98): *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata Allora*

$$T_{mg}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{n-j}, \quad a_0(x) = 1,$$

cioè, per ogni r *e* k *esiste* $C_{k,r}$ *tale che*

$$||T_{mg}(x) - \sum_{j=0}^{k} a_j(x) m^{n-j}||_{C^r} \leq C_{k,r} m^{n-k-1}.$$

Corollario: *(congettura di Yau, dimostrata da G. Tian in JDG '90 nel caso* C^2*)* Sia (M, L) una varietà polarizzata e g una metrica polarizzata da L. Allora $\frac{\varphi_m^* g_{FS}}{m} \xrightarrow{C^\infty} g$.

I coefficienti dell'espansione asintotica di TYZ

Teorema *(Z. Lu, Amer. J. Math. 2000):* Ciascun $a_j(x)$ è un polinomio della curvatura della metrica g e le sue derivate covarianti. Inoltre,

$$\begin{cases} a_1(x) = \frac{1}{2}\rho \\ a_2(x) = \frac{1}{3}\Delta\rho + \frac{1}{24}(|R|^2 - 4|\,\mathrm{Ric}\,|^2 + 3\rho^2) \\ a_3(x) = \frac{1}{8}\Delta\Delta\rho + \frac{1}{24}\,\mathrm{div}\,\mathrm{div}(R, \mathrm{Ric}) - \frac{1}{6}\,\mathrm{div}\,\mathrm{div}(\rho\,\mathrm{Ric}) + \\ + \frac{1}{48}\Delta(|R|^2 - 4|\,\mathrm{Ric}\,|^2 + 8\rho^2) + \frac{1}{48}\rho(\rho^2 - 4|\,\mathrm{Ric}\,|^2 + |R|^2) + \\ + \frac{1}{24}(\sigma_3(\mathrm{Ric}) - \mathrm{Ric}(R, R) - R(\mathrm{Ric}, \mathrm{Ric})) \end{cases}$$

NUCLEO DI SZEGÖ
DEL FIBRATO IN DISCHI

Il fibrato in cerchi e in dischi di L^*

Sia (L, h) *un fibrato lineare positivo su una varietà compatta e di Kähler* (M, g) *tale che Ric*$(h) = \omega_g$*. Consideriamo il fibrato lineare hermitiano negativo* (L^*, h^*) *su* (M, g) *duale di* (L, h)*.*

Sia $D \subset L^*$ *il fibrato in dischi su* M *e* $X = \partial D$ *il fibrato in cerchi*

$$\boxed{D = \{v \in L^* \mid \rho(v) = 1 - h^*(v, v) > 0\}}$$

$$\boxed{X = \partial D = \{v \in L^* \mid \rho(v) = 0\}}$$

Il nucleo di Szegö del fibrato di dischi

Consideriamo lo spazio di Hardy $\mathcal{H}^2(D)$ *delle funzioni olomorfe* $f : D \to \mathbb{C}$, $f \in C^0(\bar{D})$, *tali che*

$$\int_X |f|^2 d\mu < \infty, \quad d\mu = \alpha \wedge (d\alpha)^n,\ \alpha = -i\partial\rho_{|X} = i\bar{\partial}\rho_{|X}$$

Sia $\{f_j\}_{j=1,\dots}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{H}^2(D)$, *i.e.*

$$\int_X f_j \bar{f}_k d\mu = \delta_{jk}.$$

Il nucleo di Szegö è definito da:

$$\mathcal{S}(v) = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j(v)\overline{f_j(v)},\ v \in D.$$

Il log term del nucleo di Szegö

Teorema *(C. Fefferman, Bull.. AMS '83):* Esistono $a, b \in C^{\infty}(\bar{D})$, $a \neq 0$ on $X = \partial D$ tale che:

$$\boxed{\mathcal{S}(v) = a(v)\rho(v)^{-n-1} + b(v) \log \rho(v), \ \ v \in D}$$

dove $\rho(v) = 1 - h^*(v, v)$ è la funzione che definisce D.

Definizione: *Diremo che il log term del nucleo di Szegö si annulla se* $b = 0$.

Sul log term del nucleo di Szegö

Theorem (G. Tian – Z Lu, Duke 2004): *Se il log term del nucleo di Szegö di* $D = \{v \in L^* \mid h^*(v, v) < 1\}$ *si annulla allora* $a_k = 0$ *per* $k > n$. *(*$T_{mg}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{n-j}$*)*

Osservazione: Per ogni $k \geq 1$ l'equazione (ω e f fissate) $a_k(\omega + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi) = f$ è un PDE ellittica (Tian – Lu, 2004).

Il caso di $\mathbb{C}P^n$

Esempio: $(L = O(1), h_{FS}) \to (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$, $\mathrm{Ric}(h_{FS}) = \omega_{FS}$,

$D = \{v \in L^* = O(-1) \mid h^*_{FS}(v, v) < 1\}$

$X = \partial D = S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ fibrazione di Hopf.

Si può far vedere che il log term del nucleo di Szegö di D si annulla.

Una congettura per $\mathbb{C}P^n$

Congettura: (G. Tian – Z. Lu, 2004): *Sia h un prodotto hermitiano su $L = O(1) \to \mathbb{C}P^n$ tale che Ric$(h) = \omega \sim \omega_{FS}$. Supponiamo che il log term del nucleo di Szegö di $D = \{v \in L^* = O(-1) \mid h^*(v, v) < 1\}$ si annulli allora esiste $F \in$ Aut$(\mathbb{C}P^n)$ tale che $F^*\omega = \omega_{FS}$.*

La congettura di Lu e Tian è vera per $\mathbb{C}P^1$

Theorem (G. Tian – Z. Lu, Duke 2004): Sia h una metrica hermtiana su $L = O(1) \to \mathbb{C}P^1$ tale che $\mathrm{Ric}(h) = \omega \sim \omega_{FS}$. Supponiamo che il log term del nucleo di Szegö di $D = \{v \in L^* = O(-1) \mid h^*(v, v) < 1\}$ si annulli allora esiste $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ $F^*\omega = \omega_{FS}$.

dimostrazione:

$$a_2(x) = \frac{1}{3}\Delta\rho + \frac{1}{24}(|R|^2 - 4|\,\mathrm{Ric}\,|^2 + 3\rho^2) = \frac{1}{3}\Delta\rho = 0 \Rightarrow \rho = const.\square$$

La congettura di Lu and Tian è vera localmente

Theorem (G. Tian – Z. Lu, Duke 2004): *Sia* $\epsilon = \epsilon(n)$ *tale che se* h *è una metrica hermitiana su* $L = O(1) \to \mathbb{C}P^n$ *tale che:*

1. $\|\frac{h}{h_{FS}} - 1\|_{C^{2n+4}} < \epsilon$;

2. *il log term del nucleo di Szegö di*

$$D = \{v \in L^* = O(-1) \mid h^*(v, v) < 1\}$$

si annulli.

Allora esiste $F \in$ *Aut*$(\mathbb{C}P^n)$ *tale che* $F^*\omega = \omega_{FS}$, $\omega =$ *Ric*(h).

Theorem 3 (D. Uccheddu, 2011) *Let* $M = \mathbb{C}P^2$ *and* $\omega_\alpha = f_\alpha^* \omega_{FS}$ *be the Kähler form on* $\mathbb{C}P^2$ *obtained as the pull-back of* ω_{FS} *on* $\mathbb{C}P^5$ *via the map:*

$$f_\alpha : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^5 : [Z_0, Z_1, Z_2] \mapsto [Z_0^2, Z_1^2, Z_2^2, \alpha Z_0 Z_1, \alpha Z_0 Z_2, \alpha Z_1 Z_2].$$

Let h_α be the Hermitian metric on $O(2)$ such that

$$\mathrm{Ric}(h_\alpha) = \omega_\alpha \sim 2\omega_{FS}.$$

Assume that the log term of the disk bundle

$$D_\alpha = \{v \in O(2) \mid h_\alpha(v, v) < 1\}$$

vanishes. Then $|\alpha|^2 = 2$, i.e. $\omega_\alpha = 2\omega_{FS}$.

$\boxed{\textbf{Qualche problema sul nucleo di Szegö del fibrato in dischi}}$

1. Classificare le varietà di Kähler dove $a_k = 0$*, per* $k > n$*. E' vero che il nucleo di Szegö del fibrato in dischi* $D \subset L^*$ *di queste varietà ha log term che si annulla?*

2. Trovare esempi di varietà di Kähler diverse dal proiettivo il cui nucleo di Szegö del fibrato in dischi $D \subset L^*$ *ha log term che si annulla.*

3. Se $X = \partial D$ *è omeomorfa a* S^{2n+1} *cosa possiamo dire di* M*?*

Quantizzazioni regolari e nucleo di Szegö

Teorema 4: *(C. Arezzo, L., F. Zuddas, 2012)* Sia g una metrica di Kähler su M polarizzata da L. Se (L,h) è una quantizzazione regolare di (M,ω_g), $\mathrm{Ric}(h)=\omega_g$, allora il log term del fibrato in dischi $D=\{v\in L^*\mid h^*(v,v)<1\}$ si annulla.

Corollario: *Sia (M,g) una varietà di Kähler omogenea, compatta e semplicemente connessa di dimensione n. Sia ω_g intera e sia (L,h) il fibrato ilneare hermitiano su M tale che Ric$(h)=\omega_g$. Allora il log terrn del nucleo di Szegö del fibrato in dischi $D\subset L^*$ si annulla. Inoltre $X=\partial D$ è omeomorfo a S^{2n+1} se e solo se $M=\mathbb{C}P^n$.*

Articoli di Andrea Loi sulle metriche bilanciate

1. *(joint with C. Arezzo and F. Zuddas)* Szego Kernel, regular quantizations and spherical CR-structures, *preprint 2012.*

2. *(joint with Daria e Michela)* TYZ expansion of Cartan–Hartogs domains, *preprint 2012.*

3. *(joint with C. Arezzo and F. Zuddas)* On homothetic balanced metrics, *Ann. Global Anal. Geom. 41, n. 4 (2012), 473-491.*

4. *(joint with M. Zedda and F. Zuddas)* Some remarks on the Kähler geometry of the Taub–NUT metrics, *Ann. Global Anal. Geom. 41, n. 4 (2012), 515-533.*

5. *(joint with A. J. Di Scala and H. Hishi)* Kähler immersions of homogeneous Kähler manifolds into complex space forms, *Asian Journal of Mathematics Vol. 16 No. 3 (2012), 479-488.*

6. *(joint with R. Mossa)* Berezin quantization of homogeneous bounded domains, *Geom. Dedicata 161 (2012) 119-128.*

7. *(joint with M. Zedda)*, Kähler-Einstein submanifolds of the infinite dimensional projective space, *Math. Ann. 350 (2011), 145-154.*

8. *(joint with Roberto Mossa)* Uniqueness of balanced metrics on complex vector bundles, *J. Geom. Phys. 61 (2011) , 312-316.*

9. *(joint with M. Zedda)* Balanced metrics on Hartogs domains *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81 (2011), no. 1, 69–77,*

10. *(joint with M. Zedda)* Balanced metrics on Cartan and Cartan-Hartogs domains *Math. Z. 270 (2012), no. 3-4, 1077-1087.*

11. *(joint with A. Greco)*, Radial balanced metrics on the unit disk *J. Geom. Phys. 60 (2010), 53-59.*

12. *(joint with S. Matta)*, Evolution paths on the Equilibrium Manifold, *J. Math. Econom. 45 (2009), 846—851.*

13. *(joint with T. Gramchev)*, TYZ expansion for the Kepler manifold, *Comm. Math. Phys. 289, (2009), 825-840.*

14. *(joint with F. Cuccu)* Balanced metrics on $\mathbb{C}^n$, *J. Geom. Phys. 57 (2007), 1115-1123.*

15. Regular quantizations and covering maps, *Geom. Dedicata 123 (2006), 73-78.*

16. Bergman and balanced metrics on complex manifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2 (2005), 553-561.*

17. A Laplace integral, the T-Y-Z expansion and Berezin's transform on a Kaehler manifold *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 2 (2005), 359-371.*

18. Regular quantizations of Kähler manifolds and constant scalar curvature metrics, *J. Geom. Phys. 53 (2005), 354-364.*

19. *(joint with C. Arezzo)* Moment maps, scalar curvature and quantization of Kähler manifolds, *Comm. Math. Phys. 243 (2004), 543-559.*

20. The Tian–Yau–Zelditch asymptotic expansion for real analytic Kähler metrics, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. v. 1 No 3 (2004), 253-263.*

21. *(joint with C. Arezzo)* Quantization of Kähler manifolds and the asymptotic expansion of Tian–Yau–Zelditch, *J. Geom. Phys. 867 (2003), 1-13.*

22. *(joint with D. Zuddas)* Some remarks on Bergmann metrics, *Riv. Mat. Univ. Parma 6, no. 4 (2001), 71-86.*

23. The function epsilon for complex Tori and Riemann surfaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7, no. 2 (2000), 229-236.*

24. Quantization of bounded domains, *J. Geom. Phys. 29 (1999), 1-4.*