La proprietà di Wiener per operatori integrali di Fourier

Fabio Nicola
(in collaborazione con Elena Cordero,
Karlheinz Gröchenig e Luigi Rodino)

Politecnico di Torino

Varietà reali e complesse: geometria, topologia e analisi armonica
Scuola Normale Superiore, Pisa
28/02 - 3/03, 2013

Ricordiamo un classico risultato di N. Wiener.

Si consideri l'algebra $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ delle funzioni $f \in C(\mathbb{T})$ la cui serie di Fourier è assolutamente convergente:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k t}, \qquad \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

Teorema (Wiener, 1932)
Se $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ e $f(t) \neq 0$, $\forall t$, allora $1/f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$.

Notiamo che la condizione "$f(t) \neq 0$, $\forall t$" significa che f è invertibile nell'algebra $C(\mathbb{T})$.

Il precedente teorema è stato una delle questioni trainanti nello sviluppo della teoria delle algebre di Banach (coppie di Wiener, invarianza spettrale, ecc.).

Qui proponiamo un risultato analogo per operatori integrali di Fourier.

Consideriamo un operatore integrale di Fourier della forma

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \Phi(x,\eta)} \sigma(x,\eta) \hat{f}(\eta) d\eta,$$

dove la fase $\Phi(x,\eta)$, a valori reali, e il simbolo $\sigma(x,\eta)$ sono funzioni in $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ e verificano

$$\partial^\alpha \Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ |\alpha| \geq 2, \qquad \partial^\beta \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ \forall \beta$$

e

$$|\det \partial^2_{x,\eta} \Phi(x,\eta)| \geq \delta > 0, \quad \forall (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Tali operatori sono limitati su $L^2(\mathbb{R}^d)$ ma **non costituiscono un'algebra**.

Teorema (Cordero, N., Gröchenig, Rodino, 2013)

Supponiamo che T sia invertibile come operatore su $L^2(\mathbb{R}^d)$. Allora

$$T^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i [\Phi(y,\eta) - x\eta]} \tau(y,\eta) f(y)\, dy\, d\eta,$$

per qualche simbolo τ soddisfacente le stesse stime di σ.

Punto chiave della dimostrazione (notare che non abbiamo a disposizione il calcolo simbolico!): tali operatori T sono *caratterizzati* dalle stime

$$|\langle T\pi(z)g, \pi(w)g\rangle| \leq C_N \langle w - \chi(z)\rangle^{-N}, \quad z, w \in \mathbb{R}^{2d}$$

per ogni $N > 0$, dove $\pi(z)f(x) = e^{2\pi i x\eta} f(x - y)$, $z = (y, \eta)$, χ è la mappa simplettica associata alla fase Φ, e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ è una finestra fissata.

In altri termini, **la matrice di Gabor di T è fortemente concentrata lungo il grafico di χ.**

Risultati analoghi valgono per simboli meno regolari, in opportuni spazi di modulazione.

E. Cordero, K. Gröchenig, F. Nicola and L. Rodino. Wiener algebras of Fourier integral operators. *J. Math. Pures Appl.*, 99:219–233, 2013.

K. Gröchenig. *Wiener's lemma: Theme and variations. An introduction to spectral invariance and its applications*. In "Applied and Numerical Harmonic Analysis", Birkhäuser, 175–234, 2010.

N. Wiener. Tauberian theorems. *Ann of Math.*, 33:1–100, 1932.